Mathematics and it's Recognize

数学及其认识

（第二版）

高隆昌　李伟　著


西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

数学及其认识

（第二版）

责任编辑 / 张宝华

封面设计 / Design 本格设计


ISBN 978-7-5643-1424-8

定价：45.00元

数学及其认识

（第二版）

高隆昌　李　伟　著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

数学及其认识 / 高隆昌，李伟著. —2 版. —成都：西南交通大学出版社，2011.9
ISBN 978-7-5643-1424-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①高… ②李… Ⅲ. ①数学理论 Ⅳ. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 191974 号

数学及其认识

（第二版）

高隆昌　李　伟　著

责任编辑	张宝华
封面设计	本格设计
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	四川经纬印务有限公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印　　张	25.25
字　　数	481 千字
版　　次	2011 年 9 月第 1 版
印　　次	2011 年 9 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1424-8
定　　价	45.00 元

图书如有印装质量问题　本社负责退换

认识数学

我懂数学

林群

时年九十

提高数学素养
重视数学思维

书祝

《数学及其认识》出版

张景中 2000.2.21

第二版序

拙著第一版于 2001 年（由高等教育出版社－施普林格出版社）出版后，一直受到读者厚爱，连续 5 年每年重印一次，到 2006 年因故才终止了重印．当时笔者想，也罢，干脆来一次大的整理，出第二版，以便把这些年来积累的东西（也包括教学中博士生们的一些提问和要求增加的内容）充实进去．但由于工作繁忙，特别为了融入“二象数学”这一重要而基本的思想，一直熬到现在才整理完成，深表歉意．

本版仍秉承第一版的风格（见第一版前言），我们的口号仍然是“思想重于公式”．将表明：数学的任务可归为解类与证类；数学的结构可归为序结构、代数结构、拓扑结构；数学的特征可归为离散与连续；数学的层级可归为形式→方法→思想；数学的创新类型可归为技巧创新、方法创新；数学的总体任务是发现、发掘、探索．

学习数学的门径：公式（形式化）是入门；方法是手段；思想是高端．

本版继续致力于使读者不要为貌似复杂的公式的形式语言吸偏了注意力，而是应将注意力上升到公式之上，掌握其思想．

在此基础上，我们继续把“深的讲浅，浅的讲深”作为我们编写此书的宗旨，并指出平时认为简单的东西其实并不简单，同时也提出一些问题供读者思考．问题有深有浅，目的在于刺激读者学习数学的兴趣．同时，将力求把高深数学与我们所处的客观世界、社会生活结合起来，以表明“数学就在我们身边”．我们还主张将数学与物理学结合起来学习，即在增强对数学认识的同时，也要提高“数理思维”能力，并逐步形成运用数学观点去看待世界、分析问题的自觉性，从而提高应用数学的主动性和积极性．

出于作者年龄原因，本版特别邀请第二作者李伟博士合作完成．从第一版完稿至今已十多年了，这次是站在十余年后的今天来写的．可以说十多年来的工作和成果都是在本著第一版思想（数理思维）引导下完成的．其实这也算是一种反馈，在重新审读原文时除必要的充实和润色外，也把一些与本著内容相关的新成果及新思想充实到本版中来了．本版中新增了一章，还增加了九节，补充了若干段，共增加篇幅 2/5 余．

特别地，新增的一章叫做“数学的‘二象’机制揭示”，它源自十多年来笔者在系统学中提出并逐步形成的“二象论”．发现它在数学中也是一种重要而基本

的存在，因此可以说它是对数学本质来自哲学层次的一种揭示．也就是说，人们一旦树立了“二象”观，将更有利于增强对数学的洞察力．同时在各章中也都注意到了它的自然应用，我们也特别希望它能引起数学同行的共鸣与重视．

本版的读者对象仍然是各类学科（包括数学）的研究生，以及年轻的“研究生后”．尤其是各专业博士生（包括理、工、文），他们正处在年富力强、悟性勃发的关键时期，很容易引起共鸣、激发悟性，因此我们希望不要仅仅把它作为理论知识来学，而要把它作为一个个点击悟性之“键”．

关于引文有两个作用：一是对原作者知识产权的承认；二是给读者提供参考索引．然而本著没有列出引文，原因在于基础性著作与教材中这两种情况都极少，特别在网络时代，只需在必要处简单给出书名便可查找．

作者感谢成都西南交大出版社有限公司总编张雪为本版的问世而作出的多方努力．也感谢一位未留姓名的博士生，几年前他在精读第一版过程中对全书作了仔细校正，纠正了多个错、漏、别字等．特别感谢南京陈昌春博士，在第二版最后一校前收到他发来的精心阅读本版初稿后提出的系列意见，充分体现了他的编辑经历、文字工夫和一位热心读者对本著的爱护，除系列规范性问题已解决外，还有一些站在读者角度的建议，也都逐条作了斟酌和修改，顺致谢意．

本版继续载用张景中院士为本书第一版的题词；继续载用恩师柯召院士（1910—2002）为本书第一版的题词，谨致谢诚．

作　者

2011 年春于成都

前　言

目前国内非数学专业博士生们对数学普遍感到有一种畏惧感，或说对学习数学的自信心还不够强．那么，是否能在攻读博士学位期间让他们能尽可能地多了解一些数学，或者所谓“恶补”数学呢？其实这也是广大博士生们的一个心愿．

鉴于博士生们对数学的这一由衷的迫切需求；鉴于博士生们已有过一些科研经历，对数学已有过一些运用和体验；鉴于他们大都已进入人生悟性期，对知识有了一种自觉的理解意识，我们认为，在此基础上帮助他们对数学整体来一次再温习、再认识是符合他们时间安排较紧、年龄较为成熟和知识结构较为适应等特征的，因而是必要的、可能的，也是会有效的．

针对这一现势，在西南交通大学研究生院组织下，笔者于 1995 年初以“数学再认识”为题，向全校博士生开设了这门选修课，初获成功，两年后更转为必修课开设．

在开设这门课时突出了以下几点：

（1）总的精神是：立足应用数学，鸟瞰数学整体，介绍基本概念，注重直观理解，引申数学思维．

（2）以横断、综合的形式选题，沿历史发展线索来讲，致力于将“深的数学讲浅，浅的数学讲深”，始终注意到我们的对象是来自广泛科学领域的研究生们．

（3）虽然是数学，但本书并没有更多地讲解数学公式及其推导，而是注重信息量、注重思维性，有时也尝试着用轻松笔调来写，以使本课程能同时具有知识性、可读性、思想性和可藏性．

（4）介绍数学中的几大思想体系，纵横开阖，以使读者了解到整个数学的梗概和基本范畴，消除对数学的迷雾感．

（5）对于成年读者，掌握思想比学习公式本身更重要、更有力、也更现实，因为数学思维能力是数学素质的基本体现，因而本课程聚交于数学思维和数学意识的启发．

总之，我们希望通过短短一学期每周 3 学时的讲授，能使学生去除对数学的畏惧感，增强学习数学的自信心，了解更多的现代数学概念和思想，提高数学悟性和数学意识，培养数学思维习惯，进而获得短期的速成效果．

几年来的实践表明上述想法是符合实际的．尽管博士生们专业分布广，情况差别大，但各自都能从中获得适合他们自己的东西，这点使我们感到欣慰．

现在在讲稿基础上整理成册，并付印成书，目的是将此书奉献给广大博士生们及所有已进入悟性期的年轻知识分子.

特别地，本书也算是作者几十年来，在数学科研、教学和思考中各种心得、体会的综述与小结. 也可以说这就是作者理解的数学. 希望借此与数学界广大同行交流，尤其如第五章、第十一章也希望有来自逻辑学及物理学学者的意见. 我们更希望本书能起到抛砖引玉的作用，使广大读者产生更多的新思想、新思维，激发对数学更深的热爱，并作出更多的贡献.

由于是从多条线索、多个角度去认识数学，有些重要的史事、人物和内容可能多次谈到，显然重提次数愈多者愈重要，因而有利于加深印象. 但每次提到仅以当时所需的深度和角度来谈，不一定全面，为便于专项查询，同时也指出了继续参阅的相继部分.

尽管本书涉及面广，但也尽量自成体系，一般来说，学过高等数学的适龄读者皆可比较顺利地阅读.

众所周知，写这样的书风险较大，虽然本人已作了最大努力，但仍未写出心里那本书. 更限于能力，偏、片、错、漏在所难免，特别是那些涉及数学学（思辨）的内容，更不敢奢望获得一致的认同. 但不管怎样，我们不隐瞒自己的观点，坦率向读者暴露自己，以平等切磋、共探大义的态度来创作. 这里欢迎广大读者批评，更欢迎数学同行批评，特别欢迎仅作茶余饭后翻阅审视的行家里手们批评指正.

作者感谢先后听过此课的千余位博士生和年轻学者们，他们的兴趣和热情给了我很大鼓舞；感谢西南交通大学黄庆教授，是他在任研究生院副院长期间主动约我开设此门课程，为该书的成稿提供了条件；感谢中国科学院院士林群先生，感谢中国应用数学学会理事长、清华大学博士生导师萧树铁先生和谭泽光先生，感谢中国著名教育家、北京航空航天大学李心灿先生，感谢重庆大学年轻教授张世清博士，感谢他们在百忙之中挤出时间审视本稿，提出宝贵意见，并给予热情鼓励、推荐与支持；特别感谢恩师柯召院士，在他 90 高寿时（2000 年）为本书命笔题词；特别感谢张景中院士积极推荐本书，鼓励作者高投，并热情为本书命笔题词，本人平时在学业上也受张景中老师影响不少，谨此一并致谢；感谢高等教育出版社 Chep-Springer 编辑部林金安主任、徐可编辑的支持出版，他们在多方面表现出的能力和品格给作者留下了深刻印象；最后感谢作为我的同学、同事和妻子的胡勋玉教授的全面支持.

作　者

2001 年 8 月 20 日

目　录

第一章　绪　论

第一节　数学的认识论与数学思维

一、从“数学是工具”谈起

数学界和应用界都广泛流传着“数学是工具”这一说法，但是人们在谈到这点时往往带着三分神秘感．这说明这句话是需要解释的，或说这是个需要理解的命题．的确如此．

首先说，“数学是工具”这句话是正确的，但不是全面的，而且也不是本质的．其实，要说“工具”嘛，所有科学都是工具，因为它们都是有用的，都能像“工具”那样用来解决实际问题．所谓“数学是工具”主要即是从这一意义上来说的．

的确，“数学”作为一个整体，它对外主要是用来解决问题的“工具”，包括具体的“解”（解题、计算）和理论的“证”（探索、证明）等两大类型．但是须知，数学更是个具有内在发展动力的（即进行着内在 “裂变”、“聚变”的）一门基础科学，尽管其内在各学科分支之间也相互作为工具在应用着，但它的主要宗旨却是探索、发现自然规律．

总之，说“数学是工具”倒是任何科学都具备的功能．数学家说这句话旨在强调其应用特征、减弱其神秘性以鼓舞大家学习数学的信心．然而我们却不能把数学仅仅作为“工具”性、技术性课程来学，不能认为只记住一些条款就算掌握了，即使说它是工具也是“软”工具，也就是方法．它不像工程专业课中一些“方法”那样，有来自现场的技术性施工规范，只要记住了条款，就能立刻用上．

基础学科的方法是一种思想方法，是一种思维工具．比如，微分学到了经济学家那里即成了“边际分析”；统计学到了社会学家那里至少还需要处理量纲等问题；积分学到了工程设计师那里已不是书本上的那个公式，而是需要结合实际再加工．其实，高等数学中就没有一个公式、方法、定理是能直接套用的，即使书上那么多的例子也是人们“编”、“选”出来的，只不过它是搬上了舞台的“实际”，等到了实际岗位，还需要靠自己运用已学得的综合知识去理解、去建模，以解决

实际问题.

换句话说，数学固然是工具，但它只是“软”工具、是方法论，虽不可直接套用但应用面最宽、最广. 因此，必须把它学“活”才行，必须让数学不仅是我们智库中的一条条可以比对着用的“知识”，更要能融汇成自己的可以解决更多问题的“能力”.

所以，学习数学必须提高到思想高度上来. 这里，谈道“思想高度”你也许会感到奇异，因为人们一般会认为只有公式才是高度、只有符号语言才是高度. 其实，这是个误解，比如一篇文献，只有当你看出它的“思想”之后才会觉得轻松、甚至变得简单，那时你自然会觉得老子说的“大道至简”是何等的高妙了. 常常听到数学家们说“这个问题很简单”，其实这正是他们把问题上升成思想后在脑子里变得直观、清晰时的一种说法，要用大家不太熟悉、不太习惯的数学语言“准确”描述出来，那才不简单呢!

可是，从另一方面来说，既然学习数学思想比直接推公式容易，那么是否可以只学思想不管“表达式”了呢? 这里存在一个虚实“二象”(见后) 间的逻辑关系问题. 毕竟数学语言、公式的推导是实象、是基础、是“皮”，而其思想才是虚象、是上层、是“毛”. 也就是说，“思想”不是公式、定理本身，而是它们的内涵，是“升华”成的. 我们虽说不拘泥于 (实象的) 具体推导而把注意力放在掌握思想上，但也不能作“无皮之毛”，那也是不可能有大收获的.

把学习数学的公式推导、定理证明时用到的思想叫做数学思想. 用数学思想去分析问题叫做数学思维，通常叫做“数理思维”. 因为数学从来都是以客观世界为背景的，特别是以 (物理学为基础的) 自然世界为背景 (即伽利略说的“自然之书数学写成”). 特别在数、理间互动性日益增强的现代，我们会更喜欢说“数理思维”. 君已见，但凡应用界有成就的科学家，总是在数理思维上颇有修养而不只是在数学公式 (工具) 运用上的成功. 这在我国也有不少范例.

总之，数学不只是一个“工具库”，更是一个孕育和创造工具的哲学圣地，是一个方法论宝库. 因此我们学习和掌握数学也应该从这一角度着眼，随时注重其思想方法的捞取与觉悟.

二、谈谈东方人的思维特征

这里所说的东方，主要指以中国为主的东亚与东南亚地区，也就是现在说的儒教文化圈，因此所谓东方人的思维特征主要以中国为背景.

首先我们看到，中国的古典哲学特征在今天说来就是宏观的、综合的、抽象的思维特征，从道、法、阴、阳研究起，从软的一面研究起. 这点在传统的中医

理论上表现得十分明显．比如它不是从人体的部位、器官来研究，而是从宏观上作综合地整体认识，从而统一地提出了望、闻、问、切等诊断方法．这比起西医的来自解剖学的实证研究，更难以把握了．但它并不失为一种治病救人的重要手段，且往往与西医不可相互替代，而是各有所长．这主要是因为：从哲学来说，中医走的是由宏观至微观的路子，而西医走的是由微观至宏观的路子；从方法论来说，它们统归于一个“二象论”概念（概念见第四章），中医属抽象的“虚象”，西医属实证的“实象”；从空间层次来说，中医是在属性空间中运作，西医是在物理空间中运作．因此中医较难掌握，西医较易掌握（可操作性强）．

的确，正是西方人的思维特征使得他们首创自然科学，从而产生了近代的人类科学文明．具体说正是培根的剖分法、伽利略的观察法、牛顿的证明论、瓦特的发明论、惠更斯的实验论和达尔文的进化论等实证思维支撑起了近代的科学文明．西医学即是其中一门科学，所以它比中医发展得快．

东西方人思维特征的区别还可从它们在信封上写地址时，由大到小和由小到大的不同习惯上看出来．

不过，从“二象”方法论看，虚象与实象间是“互动”的，不可能只有实象的西方思维作单象发展．这不，今天西方科学即已进入其“百尺竿头”开始向东方思维寻找出路的时期．因此说今天是东方的宏观思维、抽象思维尽其发挥的时候了，而数理思维便是培养这一思维特征的一种不可或缺的方式．

三、谈谈哲学及其认识论的深化进程

大家都知道，历史上数、理、哲本是一家．的确，比如数理思维与哲学思辨、哲学方法论等，在抽象性及其若干特征上都是十分接近的，彼此相辅相成．又如纵观古今，众多数学名家的哲学修养都很深，更不乏哲学名家了，一流的有笛卡儿、莱布尼茨、庞加莱等．这是为什么？不能不说明数学、哲学之间存在着深刻的本质联系．因此西方许多高校把数学和哲学归在同一个系的做法是正确的．

应该说，即使当初笛卡儿把哲学与自然科学分割开来的“二元论”也只是为了突出科学的实证性，为了促进科学的发展，仅在历史上起到了它的技术性作用．如今科学界也逐步认识到，哲学与自然科学的融合才是本质．哲学比自然科学的范畴宽、思想高，自然科学比哲学来得深、来得实，仅凭哲学推进不了自然科学，仅凭自然科学也推进不了社会，因此，哲学与自然科学（包括数学）必须结合、必须相辅相成．

然而遗憾的是，在我国，由高考制度造成的中学过早分科，形成了人文类与理工类的分割，实则为哲学与自然科学的分割，这是很可惜的．同时，在数学界

亦曾流行的轻视哲学的风气也是不正确的，应该挽回这一损失，应该在年轻数学家（包括应用数学家）中强调哲学修养．特别在本书中更要强调数学与哲学的相辅性与相成性，讲述中也将随时提到哲学．不过我们不可能用更多篇幅去讲哲学，也没有必要，因为哲学就在我们生活中（这一观点将在第二节、一中叙述）．

总之，我们既不应该畏惧哲学，也不应该轻视哲学，而是应该热爱它．数学修养中也应该自然地包涵着哲学修养．为此，我们首先应该在意识中抱着充分接纳它的态度才是．

从传统哲学讲，人类的科学研究最初使用的是“认识论”，然后进展到“方法论”，最后是“价值论”和“本原论”，共“四论”．但我们主张应该还有一个“实证方法论”，简称“实证论”，因为它是由数理方法升华成的“数理思想”．虽然数学理论和自然科学实证方法等还不具备哲学的应用范畴，但它上升为思想后即属哲学层次的了．“实证方法论”也是经典的“自然哲学”的延续，加上实证方法论（实证论）后即成为“五论”了．显然，五论的先后排列也正好显示出其难度的先后顺序．

可以说“认识论”是人类用以理解事物的最为古朴、最为直接的思维方法，也是一种本能的认识方法，也叫思辨．

“实证论”起自科技实践的“实证方法”，是认识论的升华，或可说是更具具体化、实在化特征的一种方法论．

“方法论”系指思想方法、思维工具、世界观，可以说是认识论（也包括实证方法）的升华与指导．对于那些不可能用认识论和实证方法一下子解决的问题，应首先致力于提升观点去寻求解决问题的思路，或说用抽象的思维方式去解决问题，因为“思想高度决定思维深度”、“一切科学的前沿都是哲学”．比如，各门自然科学中的许多课题即不像生活常识那样简单：挂在墙上的东西够不着，搭上梯子就行了．这里得先放下问题本身，着力于发明、创造出一架适合的“梯子”（思想），而不是硬搬现有的“凳子”即成，或至少得借一架适用的梯子才能说得上去解决问题．

“价值论”是考虑了“利益”关系的问题，或叫“优化”问题．也就是在“物质性”问题上同时考虑了“社会性”的问题或属管理类问题，因此变得更为复杂．比如，“社会学”问题常常难以作出实证量度，难以用上测量仪器，不能不承认这时的数学是较难的．

至于“本原论”则更难了，它志在追本溯源，寻找事物发生的真谛，因此有可能涉及人类生活空间、精神世界的终际和边缘．比如人类有史以来都追索不已的四大亘古之继：地球的起源、宇宙的本质、精神的实质和细胞的发生机制等，就是本原论所要解决的最大问题．显然本原论是认识的最深层、最高级形式．

也有人说，认识论是解决“是什么”的，实证论是解决“有什么”的，方法论是解决“是什么”的，本原论是解决“为什么”的，价值论则是解决“应该是什么”的，不谓不精粹也.

总之，从总体上说来，认识论、实证论、方法论仍然是基础、是重点，价值论和本原论是其派生和推广. 进一步观察还可得知，人类从认识论进展到实证论和方法论的进次步骤是:

(1) 凭直观: 只能认识眼前有形的、实在的事物.

(2) 凭直觉: 简单说

$$\text{直觉} = \text{直观} + \text{想象}$$

它可作预测性的认识，但其准确性较差.

(3) 凭经验: 经验是一种实践知识，简单说

$$\text{经验} = \text{经历事实 (信息)} + \text{直觉}$$

这样认识事物比仅凭直觉的准确性更强.

(4) 凭知识和经验: 知识是前人经验的整理与升华，因而更为可靠.

(5) 凭“定律”和程序步骤: 定律是公认的观察、测定、实验结论，简单说定律就是公认实事，它是一种具有定格的（命题式）知识. 用定律再结合程式设计以作实证认识，即进入实证论范畴. 它比一般认识论更为实在、更为深刻，也更能深入到直观和经验不可及的深度和广度，因而更为准确.

(6) 凭“定理”和推导: 定理是依据客观事实、知识和定律、符号，通过逻辑推理而得出的科学结论，常常是人们凭经验、观察得不到的实事. 因而凭定理、定律再作逻辑推理将会使人类的认识达到更深层、更抽象的地步. 不过这时的认识同样属于实证论范畴.

(7) 方法论: 当一般认识论与实证论经上升、升华成为思想方法、思维工具和理念、观念时即成为方法论. 以此再反回去认识世界，将变得更广、更深、更抽象、更具指导性. 数学方法中蕴涵着丰富的方法论.

至此，我们看到了，对于认识事物来说，(1)～(7) 的手段是逐步深入的，其中还可分作三个大的阶段: (1)～(4) 属于一般认识论阶段，也叫做思辨认识阶段. 其特点在于凭直接地思维去认识对象，这样的认识范畴和深度自然是有限的. (5)～(6) 则属于实证论阶段，由此升华即成 (7) 的方法论. 它的特点是凭借“软”的思想方法去抽象地，从而更为宽广、深邃地认识问题. 还应说明的是，其中所说的“定律”、“定理”是广义的，只要符合上述定义的即是，不必局限于书本上已有称呼的（著名的）定律、定理. 此外现代的“思辨认识”也在借助定律、定理，但它与实证论的关键区别在于，它是凭借直接的思维方式而不是采用

实证方法去实现目标.

本书的任务之一即在借助一般认识论，去揭示数学中种种实证方法的方法论思想，以促进我们数理思维修养的提高.

四、数理思维与合情推理

科学进入现代，“数理思维”这一术语已在科技界流行起来，可什么是数理思维？这是值得认真思考、正确回答的. 这一回答本身即有利于增进我们的数学修养，不过这里不准备展开（有兴趣的读者可参见拙著《思维科学引论》)，借此我们直接给出定义：

“数理思维”属于认识论、实证论和方法论的综合型思维形式. 它具有概念化、抽象化、模式化的认识特征，或说具有把数学中的概念、结论和处理方法上升为思想，并用于认识一切客观事物的特征. 把具有这一哲学高度的数学认识叫做数理思维，也叫数学思维.

换句话说，一个具有“数理思维”修养的人常常表现出如下特点：

(1) 在讨论问题时，习惯于强调定义（界定概念)，强调问题存在的条件；

(2) 在观察问题时，习惯于抓其中的（函数）关系，在微观（局部）认识基础上进一步作出多因素的全局性（全空间）考虑；

(3) 在认识问题时，习惯于将已有的严格的数学概念，如对偶、相关、随机、泛函、非线性、周期性、混沌等概念广义化，用于认识现实中的问题. 比如他们会看出价格是商品的对偶，效益是公司的泛函等.

通俗说来，数理思维乃数学家的一种职业习惯，这里我们更强调它是应用数学家的职业习惯. “三句话不离本行”，职业习惯对于任何职业的长期从业者都会具有. 一般说这是好习惯、值得肯定. 可以说“数理思维”这一职业习惯更是人类的共识，属于数学修养之例，都希望秉有它. 这是好事，也是容易做到的，不过需要具有这一强烈意识，并坚持下去才行. 有意识的修养比无意识地、凭自然地增长来得快. 事实上数学修养从来都不只数学家才有，应用数学家（不只来自数学专业）中也不少具有高深数学修养的人.

一位名家说“真正的数学家应能把他的东西讲给任何人都听得懂”. 为什么？这就应了哲学上一句名言“真理总是简单的”. 换句话说数学形式再复杂，它总有简单的思想实质，因而我们掌握数学思想应该是容易的.

再说现代科学中，数学能力对每个人都很重要，但数学能力的关键不在数学计算，特别在计算机时代首先应该重视建模能力，要知道建模能力的基础则是数理思维. 换句话说，思想比公式更重要，建模比计算更重要.

那么，对数学的认识既是数学思维的用武之地，也是培养数理思维的一个好场所.

顺便提到，一种叫做“合情推理”或“常识推理”的思维形式也是一种重要的数理思维方式. 这是经著名数学教育家G · 波利亚推崇，被数学界广泛接受的一种数学修养，它属于“归纳”型思维，对偶于严格的逻辑演绎，有利于培养灵活、抽象、猜想和活跃的思维习惯. 目前，全世界数学教育界都纷纷主张在数学教育中加强“合情推理”能力的培养，无疑对每个科学工作者都是重要的. 我国资深数学家、数学教育学家、应用数学的积极倡导者，诸如苏步青、许国志、徐利治、林群、张景中、李大潜、萧树铁、李心灿、马知恩等，都十分推崇这种思维方法，主张在数学教育中除了讲述纯粹的逻辑演绎方法外，也应该教给学生以合情推理的方法论，训练其创造性的思维习惯，并积极作出贡献（续见第九章第一节、四）.

第二节　谈谈学习心理学

本节希望表明：① 从课堂和书本学到的只能是知识，是外来信息，人们最终的需要却是开发自己的“意识”和“悟性”；② 知识可以促进意识和悟性的开发，加深意识和悟性的内容；③ 知识的蓄积（包括学了、懂了却又“忘记了”的知识）构成了悟性必要的能源库；④ 人们自身潜在的意识和领悟能力可以不同，但他们有着共同的可开发特征和年龄特征，成人期正是它的最佳期，现分段简述之.

一、关于认识过程的一点认识

通过观察思辨，我们把脑内认知深化过程从接受知识开始到最高的“悟性”层次，初步分作四个阶段来认识，其中还包括一个跃迁层次，如图 1.1 所示.

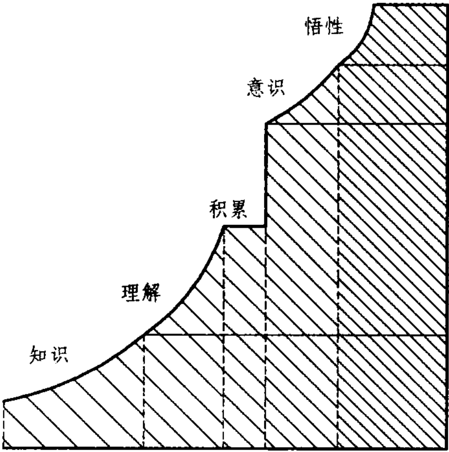


图 1.1

首先需要说明，这里我们似乎涉及了哲学史上、特别是近代哲学史上一些纷繁跌宕的敏感术语，但是我们没有工夫（相信读者也没工夫）去光顾历史大卷，弄清楚诸如康德和黑格尔的分野等

只有哲学家才关心的专业哲学问题，再去决定我们的思想站队．作为一种便捷的处理方法，我们首先强调两点，然后以解释图 1.1 来完成任务．

（1）哲学不是哲学家创造的，哲学思维原本存在于人类共同的思维中，哲学家的贡献仅在于用人类共有的理性思维去观察、总结、整理了人类的“哲学思维”，提出了种种概念．但也正是这些从数学意义来讲不甚严格、不甚分明的概念加剧了他们旷日持久的争论，并且越是争论，新概念（实则新术语）变得越是繁复稠密，使得局外人难分彼此．鉴于哲学真正的发展还是离不开科学和社会整体的发展这点，我们局外人满可以不介入它，只需从我们人人都秉有的思维特征和基本的哲学知识去直接认识我们所要的概念，把它叫做“大众哲学”．

（2）本书提倡一种坦率直言的性格，特别是根据数理思维特征，将按我们自己的理解，对我们所用的哲学概念赋以公理化（实则只能说是拟公理化）定义，借以阐述我们的观点．从科学意义上讲，即使我们的定义与“哲”人的有所差异，也不至于承受歪曲、违背的责任．

鉴于此，我们在对图 1.1 解释的同时，对所用到的概念给出如下定义：

（1）知识．

简言之，知识就是脑内存储的正确信息，换言之，脑内存储的一切正确信息都叫做知识，因此知识一词是很广泛的术语．所谓“正确”信息，即从根本上说是符合实际的信息，尽管暂时还无法检验．亦即这只是一种理论上的说法．

知识可以来自客观经验（包括经历），也可来自脑内创生．

知识的结构很复杂、层次很多．图 1.1 中表出的是知识的积累过程，只是一些基本层次．

（2）理解．

这里的“理解”作名词用，表示理解了的知识，也叫活知识．对于一个信息（知识)，如果获得了与之有关的更多信息，就形成一个以该信息为中心的信息网络、信息系统，这时该信息叫做理解了的信息，或理解了的知识，抑或活知识．

知识的理解也是有程度之分的．事实上，知识从基本知识到完全理解了的知识之间没有绝对分明的界限，而是个连续分布的上升的过程．

但不管怎样，基本的和理解了的知识仅以一种外来知识的形式被存储，还不能说是自己的知识，还可能被“遗忘”(理解了的知识被“遗忘”，实则是从记忆的大脑皮层“沉”入脑海里了)．

（3）意识．

理解了的知识经过一定的积累阶段（见图 1.1 中（积累）段）后，可能产生一次内在的飞跃或说升华，表现为对已有（理解）知识的“反刍”和觉醒，是对

已有知识来自自我的重新发现，叫做意识了的知识，简称意识知识.

意识知识有几大特点: ① 这种知识经过自己的重新发现已成为自己的内在信息，甚至已不记得它来自何处，倒觉得是自己从来就有的知识似的；② 意识知识能达到自如的运用，亦即可以在不知不觉的自然状态下随着思维而自觉地运用，勿须意识的驱使；③ 意识知识已不存在忘却、记忆和回忆的问题. 似乎意识知识不是存在于大脑皮层而是在大脑皮层以下了. 一般（未升华）知识与意识知识的存储状态可比做计算机上外存与内存的不同状态，内存信息可以直接运用，而外存信息要经过内存（相当于意识的驱使）才能使用.

(4) 悟性.

悟性又叫醒悟、觉悟、感悟、归纳，它比意识来得更为深刻，不仅表现为对知识的“重新发现”，而且有更深层的发现感. 所谓“发现感”，是说这种悟性所悟出的东西不一定是实在的发明创造性思想，而是一种带有情感及心理色彩的认识，一种激情，往往只能体会而不可能完全“道”出来，即所谓“只可意会不可言传”. 因为它带有内在情感性，不是一般的信息.“道可道，非常道”，一旦用语言表达出来即是一般信息，最多是经解释成为理解了的信息. 因此讲演（带激情的公众报告）效果最多只能促进意识或悟性的发生，而不可像一般信息的授予那样直接授予悟性.

总之，悟性是意识的高级阶段，它与意识没有分明的界限，是一个连续分布的更高阶段（见图 1.1). 在脑海中它是下“沉”更深的综合知识（已不只是单一知识，也不是简单的知识集，而是其融汇体，正如大海底部的沉积物，已成为新的“矿藏”了).“悟”出的与“意识”到的知识都是“内存”知识，是真正属于自己的.

一个人的意识和悟性“能力”是潜在于自身的，它只可接受外来因素的启发、诱发、激发和开发，却不可从外在直接传递、转录而来. 同时，一个人产生意识和悟性的“背景”也在自身，系长期的知识积累.

最后，悟性与灵感也不是一回事，灵感可表现为新事物的创造和发明，是时点式的闪现，可遇而不可求，随年长而衰退，而悟性主要表现为对现有知识的更深刻、更抽象的升华，具可期盼性，仅逼近于灵感创造，但还不是灵感创造.

二、对学习的一点再认识

学习（包括生活实践、书本阅读和课堂接受）似乎是人类增长智慧的唯一源泉，因此人类越来越重视学习和教育. 但这里我们准备从另一角度对学习作一介绍.

本着"一"中观点不难看到，学习获得的只能是一般信息（一般知识），最多是得到理解的知识．由于它是外来信息，只能属于图 1.1 中第一个上升过程．也就是说人的意识、悟性等更高级的知识不可由学习直接得到，所谓"师傅引入门、修行在个人"也是这个原理，皆因意识和悟性属于人的内在潜能，学得的知识（仍包括"懂了却忘了"的知识）只能为之奠定基础，但也只有通过学习积累（量变）才能产生质变，获得（有意义的）潜能开发，这就是学习与智慧间的基本关系（真正的智慧主要表现为意识和悟性能力）．我们既不能忽视学习对智慧的"源泉"作用，也不必为记不住所有学得的知识而懊恼．

本著正是基于上述认识写出的，我们从心理上力求把自己意识到、领悟到的东西写出来．但毕竟不是完全可能的，写出来的就只能是一般知识，所以我们宁可立足于在讲授知识的同时竭力附之以感情，以期诱发读者的悟性．比如历代数学家为数学留下了无数肺腑之言，令今天的学子赞叹不已．这正是他们对数学的一个个感悟和心语，它本应作为我们心灵键盘的一次次触击，使之产生一次次"运算"，一次次反响，但若我们还没有进入悟性期，也许会仅把它们当做知识来学、来记，甚至会误以为这是数学宗师们在作"秀"，在为数学打"广告"．这当然是与原意相悖的．

也就是说，仅当有了悟性的人才容易被诱发出悟性来，否则他只能作为一般知识来读．悟性是人人都有的"矿藏"，只是不同的人"矿深"（慧根）也不同．即使同一个人，不同的年龄阶段，其"矿深"也不同，正好本著是奉献给那些慧根较浅且已进入悟性期的读者的，其原因请见下段．

三、关于学习的年龄特征

教育心理学家已得知，人的学习能力是具有年龄特征的．比如粗略地讲，人从六七岁到 14 岁左右是记忆的最佳期，这时的记忆常常表现为善于死记，过目不忘，读过的知识能记住在哪一页哪个位置，但这种能力在 15 岁以后即逐步衰退．15 岁以后的记忆越来越依赖于"理解性"记忆．一般说在 25 岁以后，连理解性的记忆也已走向或走过顶峰期．但此期（25 岁以后）内，随着人进入成年期，另一种更为重要的学习特征（思维特征）便日渐强盛了，这就是进入了"悟性期"[①]．这时他们会自然地、不自然地对已熟悉的知识进行"反刍"，产生新的感觉和深层的

① 孔子说人的"30 而立，40 而不惑，50 而知天命"即是对人进入悟性期以致迭进至顶峰的特征描述，只是今天看来，也许人的悟性期要来的更早一点。

意识．其特点是：知识一旦进入了悟性思维，即自然地变成了自己的“只读内存（ROM）”，成为“本事”，而没有得到悟性，或说未达到悟性程度的（未沉入脑海的、仍在大脑皮层的）知识，常常会被逐步遗忘．每个年长的人都可作出回忆比较，他们在 25 岁前所记得的能够背诵的知识往往比他年长以后的多．许多年轻时能引经据典口若悬河的善辩者，老来却吐不出多少词来也是这个原理．这就是年龄进入悟性期后，原来“外”存的大量知识，要逐步经受一个取舍过程，能达到意识和悟性级别的则转为更高级的“内存”形式，变成自己的知识，如观点、观念、信条之类的知识（也许老人的固执也源于此），其他的知识则逐步萎缩．当然，必须承认另一个事实，年轻时存储地理解了的知识越丰富，将来得到的悟性知识则越多、越高级，亦即既存的知识量的雄厚度是与悟性量、悟性深度、创造性呈正比的．

总之，我们看到，目前的博士生们都进入了人生悟性的最佳期，加上他们有丰富的前期知识，更应珍重这一时机，有意识地去接受启发，创造激发悟性的心理环境．只有抱这样的观点去学习、去阅读、去领会更深层的知识，才会更有利于我们的事业．本著也是抱着适应读者的这一心理来写的．

第二章 数学一瞥

学习数学与学其他科学一样，随着学习的深入，对其历史的了解“需求”也会成正比例的增加.

本章将以鸟瞰方式从多个角度对数学的历史（主要是近现代史）作一简要的纵览：一方面仅以“应用数学工作者”的基本“需求”为限；另一方面不是在讲历史，仍只站在“思想认识”高度来写.

第一节 数学史一瞥

一、数学的基本生发图（见图 2.1）

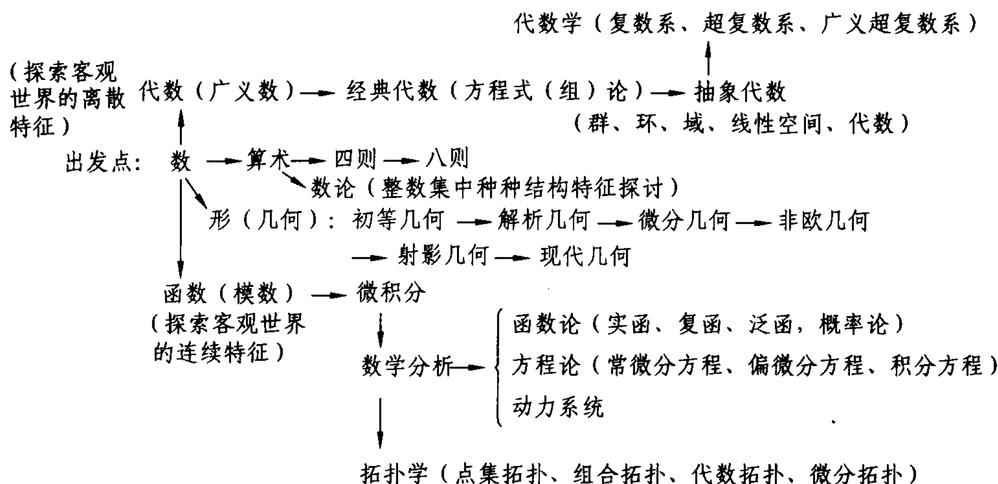


图 2.1

注：以上只是从纯数学角度作出的例图. 至于应用数学则以上述数学作为综合的理论基础，并且还可分作如下两个层次：

（1）应用基础：如价值数学、运筹学、组合数学、数理统计学、系统科学、

决策论等.

（2）实际应用：思维（认识）→建模→分析→返回对象（循环至满意为止）.

二、数学中心的迁移史

在古代（公元 5 世纪以前），数学发展的中心地带在东地中海岸的希腊、埃及、巴比伦（也涉及阿拉伯、印度、中国）等地区，主要特点是希腊的三角学、埃及的平面几何、巴比伦的初等代数和中国、印度的算术等. 在中世纪时期（公元 6～15 世纪），因宗教桎梏，整个科学进入黑暗期（特别是 6～11 世纪），仅有一些自发性的发展. 相对起来这时的数学中心地带仍在移动，已移至中欧和西欧，如意大利、法国、奥地利等地，主要贡献在初等代数上，如三次、四次方程的求根公式（意）和（根与系数关系的）韦达定理（法）的发现. 在近代（16 世纪以后），数学中心进一步西移，主要在波兰、德国、法国、西班牙、英国等国，主要贡献为微积分（英、德）、对数（英）、解析几何（法）等. 到了近现代（19 世纪末以来），数学经过了源于西欧的数学爆炸性发展后，其中心于 20 世纪初开始横渡大西洋移到了美国. 不过自近代以来，与其说是中心的西移，倒不如说是中心的西扩. 比如，在近代以来可以说西欧和美国都属于中心区，特别在现代（20 世纪 60 年代以来），这个中心区更加西扩到了日本乃至东亚和东南亚，中国已越来越明显地成为首当其冲的中心了.

总之，在两千多年的数学史中，数学中心自中国、印度、巴比伦、希腊乃至中欧、西欧、美国、日本，自东向西移动和扩展，最终成为一个基本上落在北纬 30°～40°（仅北欧超出一点）内的封闭环带，这似乎是个奇异现象.

但要看到，数学中心扩展的这一历史特征和地理特征，皆与整个科学发展中心以及经济发展中心的迁移特征十分吻合. 显然，这就不是偶然的了.

三、数学史的几个重要阶段

1. 公元前 6～公元前 3 世纪

此期，在当时的数学最中心希腊，发生了如下几件对整个数学史起着重要影响的事件.

（1）毕达哥拉斯学派. 首先是，他的学派可算是数学史上时间最早（公元前 580 年～公元前 500 年）、规模最大的学派. 其次是，毕氏犯了个有理数错误，他误认为任两条线段间皆可公比，亦即认为任一线段的长皆为有理数，实则认为数

只有有理数，由此产生了数学上“第一次危机”；但也因此对数学和哲学产生了一次大的推动；再则是，毕氏对黄金分割的深刻研究和运用．黄金分割是在整个数学史乃至 20 世纪的应用数学优化理论中，都还起着重要作用的一个数学成果．最后是，大家都熟悉的，毕氏还独立地发现了**勾股定理**．

(2) 欧几里得几何．欧氏是毕氏学派的继承者，他对数学史的最大贡献是撰著了《几何原本》．《原本》的最大特色是创造了公理化方法，这是吸取了毕达哥拉斯错误的教训而提出来的．公理化方法发展至今，都对数学起着基础性的作用．关于这一部分，留待下节进一步讨论．此外，《原本》使得人们把凡是满足它的“五大公理”和“五大公设”的几何学都叫做**欧氏几何学**，把推广物理空间所成的、n 维直角坐标系表示的空间（满足欧氏公理者）叫做**欧氏空间**．

(3) 哲学家芝诺（公元前 5 世纪）提出“芝诺悖论”，简单地说是他提出诡辩：“飞矢不达的，静矢不起飞”或“走神亚其尔追不上乌龟”的悖论．一般认为由此引起了数学的“第二次危机”．它标志着数学对“无穷小”的第一次深入思考，不过这一危机真正受到重视是在 17 世纪 70 年代发明了微积分时．有趣的是芝诺悖论至今可以说还没有得到公认的解决（十一章将进一步谈到）．

(4) 产生了几何学三大世界难题：用圆规和无刻度直尺画圆为方，三等分任一角，倍立方体等之不可能．（皆已得证）它们是产生高等几何（19 世纪，以射影几何为代表的推广欧氏空间的几何学）的先驱思想．

2．公元 17 世纪：产生了高等数学

17 世纪发生的如下几大重要事件，使得该世纪堪称高等数学的世纪，或叫做近代数学的开端．简单说来就是（依时间顺序）：

(1) 开普勒天体三大定律的发现（1601—1619 年）．可以说是三大定律开创和推动了堪称应用数学分支的天体力学和天文学的发展，因此说是推动了数学的发展，特别是现代数学重要分支——“动力系统”的发展．这三大定律就是：

- 太阳的行星沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道运行．
- 连接行星与太阳的“矢径”在相等时间内扫过相等的面积．
- 行星运行的周期平方与该轨道的半长轴长成正比．

(2) 内比尔发明了对数（1613 年）．可以说，在积分学中没有对数（自然对数）是无法进行的．比如

$$dy = y\,dx$$

这样一个极简单的微分方程，如果没有对数概念就表不出它的原函数（积分后的函数式）来．可见对数的发明直接为高等数学的诞生做了准备．

(3) 笛卡儿发明了直角坐标系（1619年）. 据说是1619年11月10日笛卡儿的一个祥梦产生了直角坐标系，又叫笛卡儿坐标系，从而产生了解析几何学—— 高等数学的三大基础（微积分、线性代数、解析几何）之一，产生了坐标系下的函数讨论，产生了“活”的数学. 因此说笛卡儿坐标系标志着数学进入新的时代.

(4) 微积分的发明（17世纪70年代）. 牛顿和莱布尼茨分别从不同出发点独立而同时期地发明了微积分学. 微积分学在整个数学中的地位已不用任何人宣传解释，但反过来，真要说透微积分在数学中的地位和作用也是难的.

(5) 从应用数学角度，不能不承认牛顿的《自然哲学的数学原理》(1687年) 也是推动近代数学的一大因素. 因为已公认它是整个自然科学的奠基性巨著，特别是其中提出的运动学三大定律和万有引力定律也直接丰富了数学、一般力学和天体力学的研究.

(6) 数论的成熟（17世纪末）. 数论是数学中一门特殊学科，它的产生很早，成形也早，但至今仍然是一门活跃而“年轻”的学科. 数论问题的吸引力特别强，似乎很容易进，但“易进不易出”，因为它要求的技巧性很高，不易出成果. 先后发生在17世纪末至18世纪初的世界三大难题：费马问题、哥德巴赫问题、华林问题，使数论成为一门独立的数学学科. 所谓“独立的数学学科”一般指它能依赖自身内部的问题推动其发展，正如点燃了的柴火、引爆了的核弹一样能内在地继续进行.

人们也许会认为数论不过是玩整数游戏，与数学的现代化没多大关系. 其实不然，就以三大难题来说，不仅因为它们的难度和吸引力增强了数学的知名度，也因为要解决它们必须在现有数学基础上进行再创造，产生新的突破才行. 由此，它推动了数学和其他科学的发展. 19世纪末解决华林问题（希尔伯特）是如此，1994年解决费马问题（A · 怀尔斯）也是如此. 至于哥德巴赫问题，虽已有过很多突破性创造，其方法已广泛用于其他分支学科，却仍有最后一步的所谓“1+1”问题至今还没有呈现解决的希望（其前沿仍然是陈景润 20 世纪 70 年代完成的“1+2”）.

注：18世纪主要是微积分（在其基础理论未建立起来之前的）技术发展时期如解析理论（代表人物：达兰贝尔）和在力学天文学的应用（代表人物：拉格朗日）等，此外是欧拉创立了复变函数、无穷级数论等. 相对说来此世纪成果少一点，所以未单独列作一个历史阶段.

3. 公元19世纪：产生了纯数学

19 世纪最大的特征是其后半叶产生了数学的爆炸性发展，从而产生了纯数学，使得数学从此明显地分作纯数学和应用数学两大营垒. 这是19世纪以前不曾

有过的，因此这也是现代数学的本质特征之一.[①]

酝酿并产生19世纪后半叶数学“大爆炸”发展的主要因素和形势特征是:

(1) 在1820年证明了5次和5次以上代数方程不可解（不可一般地用有限形式表出根来）的同时提出了“群”的概念，从而产生了群论，也为近世代数的诞生奠定了基础.

(2) 1822年Fourier（法）以其“热传导解析理论”一文创造了傅里叶分析，成为数学分析的支柱性方法之一，更是应用数学一个重要的基础理论.

(3) 非欧几何的产生，具体说是1826年产生了罗巴切夫斯基几何，1854年产生了黎曼几何. 它们都是改变了欧几里得几何的公设5（过平面直线外一点能且只能引一条该直线的平行线）而创造出的合逻辑而不合直观的几何学，从而激发了人们新的“数学思维”观念.

(4) 1873年，康托尔提出集合概念，从而产生了集合论. 集合论宣布了现代数学的开端（续见第三章）.

(5) 19世纪70年代产生了极限论，奠定了微积分学的理论基础，结束了关于微积分学理论基础的整整两百年的争论，从而刺激了“分析学”的迅猛发展.

注：这里不能不提到产生于19世纪的几大应用数学模型，因为它们分别孕育了相应学科在20世纪内的突破性发展. 这就是：

• 经济学上一般均衡模型（1874年，参见拙著《数量经济学导论》），由此兴起了一门数理经济学，经过整整八十年才得以证明均衡点的存在. 在此方向上产生了多位经济学诺贝尔奖获得者.

• 物理学上产生了熟知的麦克斯韦方程（1875年）. 它使得法拉第提出的革命性的“场”概念（1830年代）真正用上了数学，同时成为后来一系列场理论（如统一场、规范场）的基础，而且多种场方程都以它为特例，成为检验一个场模型是否成功的必要条件. 同时随着场理论的发展，麦氏方程也被赋予多种形式，如积分形式、微分形式、坐标形式、向量形式和张量形式等，甚至其微分形式也有很多很多种，可见该模型之活力和重要性了.

• 1834年英国水利官员Russel发现船头激起的浪沿岸边前进并久久不息的现象，直到1895年才形成了所谓的KDV模型：

$$u_t - 6u \cdot u_x + u_{xxx} = 0$$

① 目前倾向于把“现代数学”时期定义为19世纪后半叶以来的数学时期，实则近现代数学；物理学称20世纪以来为现代；通有科学一般称20世纪60年代或第二次世界大战以来为现代. 其中现代数学时期如此划分的原因在于一百多年来的数学特征主要还是来自于这次“爆炸”.

由此孕育了20世纪50年代以来一门热门学科“孤立子理论”的发展，它在诸如激光、超导及整个凝聚态物理学等方面都有着光辉的应用前景．

（6）正是纯数学的爆炸性发展趋势造成了纯数学与应用数学的分家，并且一度将应用数学排斥到冷落的地位．数学家都热衷于纯数学，数学天才们都愿意投身“数学象牙塔”，甚至可说这一度成为一种思潮，这种思潮直到现代才逐渐平静下来．这里摘引一段笔者早年的日记：

数学“象牙塔”工程录：

数学象牙塔，既是实在的又是抽象的；既在现实的客观世界中，又在朦胧的高维空间里；塔里的能工巧匠们原本现实世界的人，由于兴趣、智慧和数学的引诱，进得塔来便到了另一天地，迷迷茫茫、无边无际；这里唯一的信仰是逻辑，唯一的向导是逻辑，唯一的准则还是逻辑．沿着逻辑的脉络，他们雕呀凿呀，偶尔也凿出一个通向世界的洞，这就是象牙塔的“窗”，也是数学用于现实世界的一个个希望之光．正是它们才得以使数学家自信，得以使世上人叹服．

象牙塔是美的，但它是与世隔离的，只有通过窗孔才能与世连通、为世所用．要是没有窗孔，那就成了漆黑的世界；要是处处皆窗孔，那就没有了“塔”而被融合到世界中来了……

象牙塔是需要的，世界需要它不时通过窗孔为之引来逻辑的负熵，世界永远需要适量的天才投入象牙塔工程，但我不愿意，不仅因为我不是天才．

4．公元20世纪：纯数学的继续发展和应用数学的崛起

（1）纯数学（基础数学）的继续发展，主要表现为：

① 在19世纪末数学知识剧烈膨胀的形势下，逐步形成了20世纪后的系列学科分支，如泛函分析、点集拓扑、近世代数等所谓新三高，即20世纪上半叶陆续形成的．此外，如微分几何、高等几何、实变函数、复变函数、常微分方程、定性理论，特别是偏微分方程等学科也基本上都是20世纪上半叶才形成学科的，至于代数拓扑、流形理论、现代微分几何、微分拓扑与非标准分析等学科，则更是在20世纪内才开始兴起的了．

总之，我们可以看到：现代的数学专业人才所学到的专业数学大部分是20世纪内才形成的学科，即使非数学专业的人才也已接触过不少现代数学知识，且目前还正在加强这一方向的课程体系改革．

② 在康托尔艰辛创立的**集合论**（1873年）之下，人类对实数的认识更加深刻了，续见第六章．

③ 也是在集合论（所产生的悖论）刺激下，产生了数学的**寻根热**（探索数

学的基础)，形成了“数学哲学”的三大学派：以 Brower 为首的直觉主义（主张构造性证明)、以希尔伯特为首的形式主义（主张存在性证明）和以罗素为首的逻辑主义．他们都想用自己的观点统揽数学，把整个数学圆满地装进自己的魔袋中．事实上，今天的数学则是吸取了各派的优点，在综合性发展．

④ 正是在寻根热中，20 世纪 30 年代初先后产生了两个**“哥德尔不完全定理”**．大意是说，有些“形式系统”如果是协调的，则它必是不完全的（边界不分明)．反之，如果它是完全的，则它必是不协调的（在系统内存在不可能完全得到证明的命题)．由此说明数学这个最大的形式系统不可能被上述任何一个学派的魔袋完全装住．换句话说，数学范畴是没有分明边界的，也由此使得数学寻根热冷静了下来，承认数学寻根至少不是指日可尽的，于是数学又回到了它正常的开发状态．

⑤ 20 世纪数学与其无冕之王希尔伯特的名字是分不开的，但也不可不提其嗣者“布尔巴金”学派（于巴黎创建的)．布派致力于建造数学“象牙塔”，因此对纯数学的贡献也不少，比如“数学结构”观点即是它们提出的．70 年代以后布派已逐步走向衰退．

⑥ 特别应提到：20 世纪内纯数学研究与希尔伯特 23 大问题的攻关也是紧密联系着的．比如，据统计，1936—1974 年间获菲尔兹奖（被誉为数学中的两大诺贝尔奖之一）的 20 人中有 12 人的工作都与希氏问题有关．又如，1940—1976 年间美国数学十大成就中即有 3 项属“希氏 23 大问题”的工作，由此可见一斑了．目前，23 个问题仅解决了一半多一点，仍有约 1/3 的问题仅作了部分工作，有待最终完成．剩下的几个是笼统的问题，难以说已解决了否．

(2) 应用数学的崛起．

尽管 20 世纪以来纯数学（又叫基础数学）已有了长足的发展，但人们不能不承认 20 世纪仍然是“应用数学”的世纪．也就是说，20 世纪的数学仍然以应用数学的崛起为主要特征，其表现主要在于：

① 以第二次世界大战为转折期．皆因这期间以应用数学为盟国的胜利．当时先后成立了不少为战争服务的应用数学组，如布朗大学应用数学小组（美)、布拉开特运筹组（英)、密克洛思克运筹组（美）和华生－华特运筹组（美）等．一个脍炙人口的实事是布拉开特组曾使英吉利海峡巡航飞机的飞行里程减少了三分之二．正是这些实践向世人、向政府，也向数学家显示了应用数学的威力，取得了发展的心理空间．

② 以计算机的发明为转折点．这点可从三方面来说明：首先，计算机发明的关键即来自应用数学，来自软件，而不是硬件技术，这体现了应用数学的能

力．其次，是计算机使许多过去无力发展的应用数学分支复活了，诸如四色问题研究、有限元法研究、样条分析研究乃至奇异吸引子、混沌研究等．特别地，在纯数学中也产生了机器证明论分支（续见第十章第一节、三）．再则，正是计算机的发明使得整个数值数学乃至离散数学获得新的生机，使得许多应用模型免去繁琐甚至困难的理论分析，直接以数值化结果满足了应用的急需．

③ 纯数学自身发展的困难也是促进应用数学发展的一个条件．这就是近几十年来纯数学研究者认识到，抽象化风气不是好事，同时数学中遇到的非线性问题也在日增，要能从纯数学的角度全面回答这些问题很难，不得不从应用角度出发去作局部研究．比如，一个大于 3 次的非线性生态系统（二阶三次常微分方程组）即很难作出完全的定性分析（又叫几何理论），而一旦仅从实践出发，其相空间和系统参数范围即大大地缩小，讨论起来便容易多了．

④ 数学爆炸性发展后产生的“基础数学”分支在 20 世纪 50 年代以后已逐步趋于成熟，表现为边沿性研究、综合性研究等横向性发展和比如辛几何、非线性分析等纵深发展特征．此外便是向应用的靠拢（见下面）．

⑤ 以应用方法为特征的现代科学的刺激．首要的是以“六论”（一般系统论、控制论、信息论；突变论、耗散论、协同论）为代表的系统科学的产生和发展对应用数学的刺激．其次是经济管理科学方法的需要与创生都是对应用数学的直接刺激，诸如博弈论、社会度量学、决策学、规划论等即是．事实上，读者更容易例见，即使在数学应用已很成熟的现代科学技术中，也不乏应用数学方法的不断新生．比如，物理学家威勒创立“非交换调和分析”，波茨曼提出“波茨曼方程”，工程师克弗尔创立优选法，工程师范德玻开创极限环论等．

⑥ 现代数学与现代物理学在现代理论上的“联姻”（杨振宁语）事实为世人展示出，越显得抽象的数学理论越有可能存在高级的应用前景．的确，比如在最后一章将表明，现代数学即使在社会科学中也有着广阔的应用前景．

⑦ 现代生物数学的崛起（兹免赘述，请有兴趣的读者补上）．

⑧ 最为重要的是，上述现象的一个综合时代效应是，如今“应用数学”不仅为整个（软、硬）科技界所接受、欢迎和向往，而且越来越得到政府部门的重视，特别也得到纯数学界的赞许与支持（续见下段）．

5．应用数学与纯数学的关系史

图 2.2 系应用数学与纯数学的亲疏关系史示意图，其中虚曲线表示应用数学，实曲线表示纯数学；横轴表示时间年份，竖轴表示发展水平．

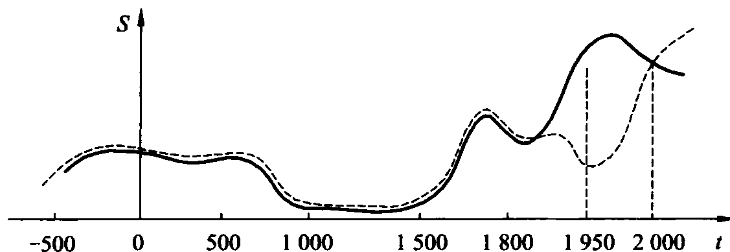


图 2.2

图 2.2 表明了如下几点：

（1）曲线的起伏走势大约表示了数学随历史的兴衰形势.

（2）大约在 1870 年代以前，应用数学与纯数学并没有分家，只统一地叫做数学，尽管创办于 1826 年的《纯数学与应用数学》杂志上已有这一提法. 原因是纯数学要能真正区别于应用数学，只有当它自身能产生动力，并推动其独立发展才有可能? 而这一特征正是在进入 1870 年代以后，产生了数学的“爆炸性”发展才得以实现. 换句话说，1870 年代以前的数学，严格说都是靠实际应用的推动在前进，最多可说 18 世纪以前的“数论”分支除外. 这就是图中虚实曲线迭合部分的实质.

（3）在 1870 年代以后，也就是纯数学产生后，它不仅脱离了应用数学，而且一度轻视应用数学，致使应用数学的地位急剧下降，与纯数学的发展形成反称. 直到 1940 年代第二次世界大战时期，应用数学的地位才开始上升. 而恰好几乎同期，纯数学也达到了它的强弩之末，开始走下坡路. 所以说在 20 世纪后半叶，应用数学与纯数学转入另一种反称发展形势. 这就是图 2.2 中 1870 年以后虚实线形成的对称形势的实质.

四、数学史鸟瞰

这实际上是从另一角度对“三”中内容的描述，把它叫做“鸟瞰”. 如图 2.3 所示，首先说，从现代来看，数学的整体可归为数值数学、高等数学、现代数学（不是现代的数学）等三大块. 它们都很庞大，都在发展，都有自己的现代化水平. 它们虽然都来自同一个客观世界（图中左侧），但发生的时代不同. 分别来说就是：

（1）数值数学，如图 2.3 中的“数”区域. 这是最早产生的数学. 首先是算术，其次是初等数论和初等代数，再后则是现代的数据处理、计算方法、计量统计、信息科学等. 根本上来说，它们针对的对象虽说都来自客观世界，但只是以

“数值”的形式出现．它们的基本手段是计算—— 遵从“四则”或“八则”运算法则．特别在 17 世纪前还没有“坐标系”概念，数值间的关系是很抽象的，即使一个低阶代数方程的根随其系数的变化规律，也是令人难以捉摸的．

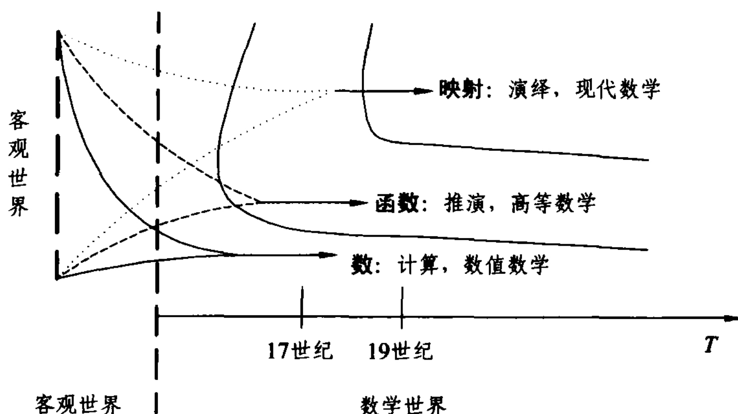


图 2.3

（2）高等数学，如图 2.3 中的“函数”区域，它产生于 17 世纪（本节“三，2”中的）的高等数学世纪．其特点是来自客观世界的处理对象：函数—— 数值概念的推广与提升，产生了一种质的飞跃，由数值计算上升为“数学分析”，简称“分析学”．根本的是这时有了坐标系—— 把空间规范化、度量化了，让人们的（本能的）空间思维变得实在了、精确了．这时，把函数间的运算关系叫做“推演”，其运算法则仍然是从算术（甚至只是“四则”）推广成的，不过又增加了微分及积分法则进而成为“十则”运算了．

（3）现代数学．先谈谈现代的数学．现代的数学系指数学各个学科发展到现代的总体状态，它对应于“三、3～4”的内容，也叫做数学的现代．亦即图 2.3 中进入数学的现代（19 世纪以来）的所有数学学科．由于 19 世纪产生了数学的爆炸性发展，使数学突升到几乎已能适应当今科学所需水平（或说此后至今数学仅处于缓增阶段），同时形成了“纯数学”与“应用数学”的分野，因此人们把数学的现代从 19 世纪后半叶算起．

显然，“数学的现代”在这里是难以言尽的，这里仅强调一下它与“现代数学”的不同，并就“现代数学”多说几句．

那么，“现代数学”则是一个专门术语，示意如图 2.3 中“映射”区域．具体说是把以“流形”和“超复数系”为背景的数学（或说建立在“流形”和“超复数系”上的数学）叫做现代数学，诸如大范围几何学、动力系统学和现代代数学

等即如此.

显然，“现代数学”代表了“现代的数学”的前沿特征. 其特点：一是把函数进一步抽象为一般的“映射”，只强调函数特征而不再强调其函数表达式；二是把“数”的概念从（符号代表的）“代数”升华为（超越了数的）“一般对象”了；三是其运算关系作了进一步提升，可叫做“演绎”. 但是，不管怎样，根本上说来这些运算还是从“十则”或“八则”甚至是“四则”运算推广、提升而来的.

五、数学从“数”到“学”的升华

以上是从不同角度对同一个数学发展过程作出的描述，这有利于一次次加深对数学的认识. 为此，再从另一角度给出一次描述.

数学，既可看成关于（广义）“数”的学问，又可看成从（狭义）“数”到学——“形而上”的数——的发展过程.

这时可以看到，数学即使对狭义“数”——数字、数值、数码——的认识，也有个“从古至今”的漫长过程和“深不着底”的丰富内容. 前者是因为，比如现代计算机科学和信息科学不都还在认识“数”吗？后者是因为，比如今天的基础数学，竟然对（0,1）区间上的“数”结构也远未认清（续见第六章）.

再来看看，当把“数”作为一个台阶时，它的下一个台阶是什么？那就是“代数”—— 用字母代替的数. 这时数学的发展便是另一条路子了，此即把“算术”上升为“代数学”走初等代数、高等代数、近世代数、现代代数的路子了，不过其运算法则还是原来的几个法则.

那么，再下一个逻辑台阶（实为另一发展方向）则是把“代数”上升为“函数”. 这时的发展是沿着以微积分为基础的“分析学”途径，主要是沿常微分方程、偏微分方程两个分支的发展. 若进一步发展则形成一个宏大领域——沿着多个方面的台阶上升：

一是泛函分析，系顾名思义地将函数概念广泛化后作出的“数学分析”. 目前仅“线性泛函”较为成熟，非线性泛函一直未能形成基础学科（后面将进一步讲到）.

二是复分析，此即对复变函数的数学分析. 一方面是多复变函数的分析，这是值得关注的领域. 另一方面是调和分析，它是在傅立叶级数和欧拉公式（$e^{ix}=\cos x+i\sin x$）基础上对微积分学的继续推进.

三是拓扑学，即在一般拓扑学（又叫点集拓扑学）基础上又创生了组合拓扑学，以及结合了代数工具的代数拓扑学.

四是几何学．它是一大方向，主要是作为现代数学标志的、建立在流形和张量分析（以及现代代数、拓扑、泛函）基础上的大范围几何学或叫现代几何学．

第二节　应用数学全空间认识

近现代以来，数学被分成应用数学和基础数学（也叫纯数学）两大体系．它们的关系可以这样来理解，从理论深度上看，

$$\text{基础数学} \supset \text{应用数学}$$

从范畴广度来看，

$$\text{应用数学} \supset \text{基础数学}$$

本节旨在从应用数学及其背景空间全局（叫做应用数学全空间）来考察应用数学的全过程和结构特征．应用数学全空间就是数学认识的基本范畴．

图 2.4 表出了应用数学全空间，它包括应用数学的背景空间和应用的基本过程．其中**背景空间**即它所依存的客观世界，也是其应用范畴．这个范畴包括所有科学对象（已知的和未知的），特别也包括数学本身．

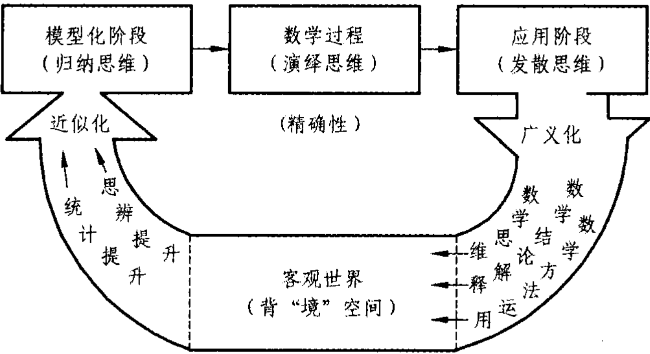


图 2.4

在这一背景空间上，数学的应用过程，可分为三个大的阶段，现分别解释于下：

一、模型化—— 数学的近似性

不管是基础数学还是应用数学，首要的前提是明确任务，这个任务在数学内部就是提出问题或猜想，在应用数学即是建立数学模型．

数学模型一端联系着数学，一端联系着实际，起着桥梁作用．但数学要求它的模型是确切的，而模型对于实际只能是近似的．那么，数学是如何处理这一矛盾的呢？这就是建模的“公理化”手段，这点放到第三节进一步讨论．这里首先认识一下建模的“近似性”，以作公理化认识的前奏．

如果把厨房里菜墩上的萝卜比喻成数学模型，则它的原象就是生长在土壤里的萝卜，建模工作就是要把土里的萝卜“映射”成菜墩上的萝卜，干干净净不能拖泥带“须”，以便（数学的）厨师们严格加工．为此建模者不仅要把萝卜“拔起”脱离原位，更要使用公理化的利刀剃掉它上面不必要的东西，甚至为使之变成纯粹品，不惜削掉一些萝卜肉只留下近似主体．这就是建模的基本过程、基本特征和基本手段．

简单说应用数学的首要步骤是将所要解决的问题从没有数的实际对象，演变成具有数量的或数量特征（模量）的，抑或说具有严格界定的、分明的形式，把这一演变过程叫做**模型化**，也叫**形式化**或**建模**．

1．两种模型化方式

（1）用统计方式提升成的模型：计量模型．这是依据样本数据和统计学方法来完成的，如回归分析、时序分析乃至求概率矩阵等系列统计方法皆具有这一实质，所得到的模型统称“计量模型”，一般是线性方程组．计量模型的优点是严格性强，具有精确性判据，一般用于实践中具体问题的统计、推断等．

（2）用思辨方式提升成的模型：数理模型．它要求应用数学工作者针对所给实际问题，作出充分地调查了解和思辨认识，然后依赖自己的数学能力直接把问题表述成可供纯数学分析探讨的形式．这种形式有三种：一种是用元素（表以字母）和关系（表以一般符号，如运算符号、逻辑符号和系数等）构成的单个或一组表达式，此即典型的数学模型．比如历史上各门自然科学中典型数学模型都不少，诸如麦克斯韦方程、薛定谔方程、伏特拉生态方程、各类特殊函数等即是．另一种是用一套条例（公理）界定出的一类事实，以供数学作逻辑推理分析．比如经济学上阿罗的不可能性定理所显示的模型（见第三节），以及许多科学结论甚至悖论的表述都是用一套公理条例给出的．第三种是用一套程式或叫步骤来表出的模式，一般叫做数学方法．如管理科学的层次分析法、系统动力学方法、灰色预测法以及多种评价方法等皆属这类特殊的数学模型．它是由典型模型与条例叙述合成的综合形式．建立数理模型的优点是不依赖于数据，适用范围广，原则上任一系统的任一层次皆可建模探索．

总之，不管用哪种方式作模型化，所形成的模型较之实际对象来只能是近似的．建模犹如素描，甚至是人物漫画，只突出对象的主要特征和实质．因此，模型只能是现实的一种近似表征，人们的努力只在于让近似程度高一些罢了．严格

说来模型的好坏只能表现为近似程度的大小，而不能说绝对精确．严格来说，一个“模型”与其原对象应该“同构”（满足线性关系和一一对应关系），但数学模型是难以完全做到这点的，主要原因是基于数学模型的近似原理．

2．数学模型的近似原理

（1）客观世界总是模糊构成的（见第九章第五节），因此客观事物不可能绝对孤立地存在，而为着数学的严格性需要，要求提出的模型应该是独立的、具有明确边界的，这就不可避免地要做一些近似处理（靠公理化手段）．

（2）数与数之间是分明的，所以要把本质上具有模糊性的客观事物精确地表成数（数量或变量），本身即不可能精确．

（3）实践要求一个好的数学模型既要简单又要（对客观事物）描述精确，这是个**两难问题**，不可两全．因为客观事物总是多因素的，甚至无穷多因素，这在数学模型上难以表现出来．反之，即使表现出来了，数学上也难于处理，表现越“真”数学处理越难，因而数学模型不可能完全与实际对象“同构”．

（4）换一种说法，从系统角度看一切客观系统，严格说来都是开放系统，而封闭系统只能是人为的．反之可说人为系统必是封闭系统（控制论中的开放系统（模型）也只是相对的说法），否则不是真正的人为系统．数学模型是人为系统，因而只能是封闭系统，却它描述的客观系统只能是开放系统，焉能完全精确？

归结起来足以说明，应用数学相对于客观实际来不可能完全“精确”，原因即在于模型具有近似性，当然我们总希望所建数学模型尽量“精确”，不过这得涉及另外问题，此即建模能力．

建模能力是一类应用数学修养，特别在现代计算可以靠机器代劳的今天，建模更显得重要，也更需要建模，然而它靠的却是“数学＋艺术”，没有数学修养不行，但只有数学修养也不行，总结起来把它叫做“应用数学修养”．现作为一例，来欣赏一下分形理论．

3．分形理论欣赏

1973年法国年轻数学家曼德坡一次乘飞机去英国，在飞机自高空向地面下降的过程中，他看到了英国海岸线形状的改变过程，使他突发灵感，悟出了一个立即为世人接受的“分形原理”．它为何如此容易被接受？原来人们都有类似经验，所说现象本来就在我们的眼皮下面，只是还没有上升成“意识”罢了．现在经别人一点破，立刻醒了，后悔不已．实际上它就是常说的自然界的层次结构、自相似结构．几乎同期，我国生物学家也提出了生物“全息胚”概念．其实，这正是分形结构在生物世界的体现．可见一个“平常”现象要能上升成意识是不容易的，一旦成了，其贡献也是不小的．事实上曼德坡的贡献还远不止于此，更主要的还

在于他将此思想形式化，提升为数学模型，从而产生了一门新兴的应用数学分支. 他的思维创造主要有如下几点：

（1）排除客观世界种种“实际分形”中的各种干扰因素，提出一个抽象模型，乱麻堆中抽一丝，只突出其根本特性.

（2）提出了“生成元”和“自相似”概念，进而给出了分形的公理化定义.

（3）用动态方程来描述出分形结构.

（4）记分形的生成元为 G_0，记层次间的自相似性为映射 F，G_0 经 $n-1$ 步映射后的总体形式记为 $F_{n-1}(G_0)=G_{n-1}$，则第 n 层分形总体结构为

$$F_n=F\circ F_{n-1}(G_0)=F(G_{n-1})$$

（5）进一步给出分形的数学特征，具体说是其几何特征——“维数”概念，这里以例说明.

例 1 我们有个如图 2.5 所示的所谓“平面上康托尔集”数学模型（即“1，(2)”中第三种模型），它有很多性质. 其中之一是说它也是一个分形. 这时 G_0 为钝角△ABC. 在 $F_1(G_0)=F_1=F(G_0)$ 中 F 的作用是，如图 2.5 所示将 G_0 一（底）边三等分后连成三个三角形，再去掉中间一个三角形剩下两个三角形，即有

F：三等分 $G_0\rightarrow$两个三角形

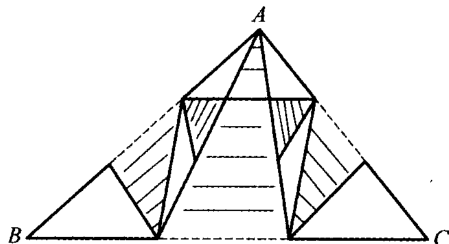


图 2.5

再对两个三角形分别如法炮制，继续下去后可得

$$F_2=F\circ F_1(G_0),\quad \cdots,\quad F_n=F\circ F_{n-1}(G_0)$$

进一步，为给出分形 F_n 的维数，根据自相似映射 F 的特征，只须就其第一步映射来给出即可. 这时，考察的方式（或叫角度、出发点）不同可有不同的**分数维**. 比如一种方式是借几何上的面积公式思想，记作用 F 为

$$3^{\alpha}=2$$

（3 表 G_0 分成的 3 个三角形，2 表“映射”后剩下两个三角形），从而算出

$$\alpha=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0.63\ （维）$$

此系把图 2.5 作为面积的分形维数. 另一种方式是，若要求“分维曲线”（图中沿各三角形的边）的维数，因这时三角形的每一边都是 3 段线经映射变成了 4 段，

即有

$$3^{\alpha}=4$$

实则只要用平面维数 2 乘以 α 即可．此即图 2.5 中曲线的维数为

$$2\alpha\approx1.26\ (\text{维})$$

“分形理论”之所以又叫“分维几何理论”，即来自于此．

如今分形几何学在理论和应用上都经过了一个发展高潮，转入了常规发展状态．

二、精确性—— 数学的内部过程

在数学模型或数学问题、数学猜想给出来后，数学的任务就给定了，以下的问题则是解决问题．这时仅表现为数学内部的处理过程，也就是纯数学的过程，它将针对不同类型的数学模型进行分析、求解、推导、论证（论证主要是针对方法类模型），总的叫做数学处理过程．

数学处理是精确的．这里的“精确”表现在三个方面：

（1）数学**前提的准确**，也就是问题、模型的准确（见第四节公理化）．

（2）数学**过程的精确**．这可以分为三种形式：

① 计算的精确，表现为数字的等式性演算过程的精确．

② 推导的精确，表现为符号的公式性推演过程的精确．

③ 推理的精确，表现为形式逻辑和符号逻辑综合的“夹叙夹议式”（希尔伯特的）推理过程的精确．

（3）**相对于既定目标的精确**．这点表现在两个方面：

① **误差理论**．当数学（过程）所获结论与既定目标有差异时，作为数学的精确性表述，即在于表达出这个差异，并探索其规律．这就是纯数学和应用数学中皆有着丰富研究的误差理论，诸如计算方法中的误差理论和多种工程计量学中的误差理论等即是．

② **逼近理论**，也叫渐近理论．关于这方面的理论分支很多，大致可分为代数类、几何类、函数类．此外，如余项理论，收敛性理论等也都属于逼近理论范畴，这些都是在数学精确性意义下产生的灿烂景象．

总之，所谓数学的精确性、严密性，主要即表现在这一阶段，也就是纯数学的阶段．纯数学家倾毕生精力主要即在这一阶段工作．应用数学家经过这一阶段的方式常常是借用数学的既有成果（包括计算方法）或凭借纯数学家的直接帮助，抑或与之合作完成这一数学处理阶段任务，然后再进入下一阶段．

三、广义性—— 数学回到客观世界

数学的最终效能还是应该在客观世界中去体现．特别对于应用数学，应用是它们一切行为的最终目标，更为重要，因此总的叫做“数学回到客观世界”

1．数学回到客观世界（应用）的形式有三种

（1）对具体的**数学模型**获得的精确结论作出具体的实际解释．比如对一个动力系统，经过数学分析，尽管对其轨道分布、轨道特征及其均衡点位置等都分析清楚了，但这还只是数学上的，究竟它在所对应的实际系统中表明了什么，也就是它的实际意义如何，可不是显然的，需要数学应用者向实际部门作出解释，或者需要就这些数学结论所表现出的动向，向实际单位（甲方）作出决策咨询．这是一种具有针对性地回到客观世界的问题．

（2）作为一种数学方法回到实际中．一方面，这是指对于方法性的模型，经过数学论证之后，应用到实际．比如，我国学者创立的“物元分析法”专著已于1987年出版，表明它已经得到承认，但还不够，还需要把它灵活地运用到广泛的实际问题中．这时叫做以一种方法性的“模型”回到了实践．另一方面是指把数学内使用的“方法”推广应用到实际．比如，数学归纳法的推广性应用、反证法及箱箱原理（三个苹果放在两个箱箱里必有一个箱箱多于1个）的应用等，都是最为常见的．显然，数学修养愈好的人，他们能自觉运用的数学方法则愈多．

（3）作为**数学思想**应用到实际．这就是数学思维，也叫数理思维，它是不拘形式地把数学中种种概念、公式、定理、方法及其所涵思想提炼出来，形成一种“思维”，用于认识客观世界．这时所表现出的虽然是认识论的形式，但实质上是方法论，因为已经谈到数理思维属于方法论．关于数理思维已在第一章“第一节、三”中谈过，这里只需强调，数理思维也是一种觉悟、一种习惯，数理思维并非数学工作者才有，也并非所有数学工作者都有．若能有意识地培养自己，任何具有一般高等数学知识的人都可以形成数理思维习惯．当然，在有意识培养自己的前提下，数学知识还是多多益善的．本著即在于从读者的数学基础出发，在复习回顾基本知识的同时，从多种角度、多条线索去总结数学上已有的丰富而深邃的数学思想，其中也不乏作者自己的数理思维，希望把“浅的数学变深，深的数学变浅”，通过这些活动使读者得到启发，获得潜移默化的效果．

2．数学回到客观世界的基本特征是“广义性”

已能看出，数学的应用与“二”中模型化的任务正好相反．二中要求把实际系统抽象成数学的形式系统，其中要经过近似化．这里则要求把数学系统回到实际系统，这是把精确表达的（简单）形式回到具有“模糊”特征的原（复杂）系

统的过程．这一过程必然带有推广性和广义性．它首先需要把数学形式变成思想，然后才能更好地用到原系统，进行更多地解释和认识．把这一过程叫做**广义化过程**．

显然，数理思维即是数学与其背景空间在广义意义下的对应关系认识．在数理思维中，回避了原有的复杂繁琐公式和蜿蜒推导形式，只留下它的思想精神，用以观察认识更为广泛的世界，这是重要的，也是容易接受的．

自然，数理思维是一种思想武装、一种认识能力，它可以帮助我们提高洞察能力、提高工作质量，同时也能帮助我们提高建模能力，最终将增长我们整体的应用数学能力．

“应用数学”在一些人看来主要是指一些定量方法的运用，但在应用数学家看来，关键在运用“数理思维”去认识和处理客观事物，否则即使有了定量方法也不知道何时该用及怎样灵活运用．我们应该树立后一种观点才是．

至此我们看到了，作为一位未来的应用数学家，分属图 2.4 三个阶段的建模、解模、应用三大能力的培养都很重要，缺一不可．它们分别属于归纳思维、演绎思维和发散思维三种不同的思维形式．这时也许读者最感畏惧的是解模阶段（数学演绎），因为这可是许多纯数学家毕生奋斗的领地！的确如此，不过作为应用界，并不要求我们去耕耘它，而只要能了解它、利用它即可，繁琐的解模和复杂的分析蛮可借助数学家或计算机去作．

也就是说作为应用数学工作者，能够培养起我们欣赏、摘取数学园地里“鲜花果实”的能力足矣．由此也可说本著的宗旨是切中要害的，特别对于来自应用界的未来的应用数学家们，他们没有更多时间去细读数学“万卷”，更需要用这种便捷方式．但我们也不认为这种方式对任何人都适宜，它既要求有一定的数学基础，也要求一定的年龄特征．

四、附：应用数学中的“流弊”辨析

通常，在应用数学（包括数学的应用）中人们总是容易把注意力倾注在“数学”上，即使在“数学”上也只注意其“技术”实现，轻视了它的思想，这些都是失之偏颇的．下面再就目前应用数学中的一些“流弊”谈三点看法．

（1）在“应用数学”的全过程中，“应用”才是通连全过程的．而“数学”，如图 2.4，在其整个回路的四大环节（包括其上面三个环节加下面的一大箭头）中，可说数学只占了一个半环节，此即“建模”环节的一半（理由见 2）和“解模”整个环节．但是，如果说计算机时代以前，“解模”的确很关键的话，那么在计算机时代的今天，作为应用（只求满足实践要求），“解模”的数学要求早已被计算机和充满市场的“软件”给大大弱化了．

至于再后一个环节，把解模所得结论解释给“甲方”的问题，既关系着建模

前对项目的理解程度，也关系着对解模过程的了解，这一“过程”可是参与者都熟悉的，因此也不是数学专业者才有的强项.

总之，可说在今天“应用数学”真正对数学要求多一点的只在如下的建模上.

(2) 关于“应用数学”的建模. 由于“建模”是建立数学模型，容易理解为这是数学家的“专利”，认为至少是数学专业人士才能干. 这里从两个方面来回答:

① 建模过程分做两大步骤: 第一步是建模前对项目（或叫对象、目标、系统）的认识、分析、理解；第二步才是建模——用元素符号和关系符号构成的数学语句，描述出第一步分析中认识到的对象.

显然，第一步是个思辨分析、定性认识过程. 这时，实践经验和项目知识以及哲学修养都是很重要的，却不是一个直接的数学问题，并非数学人士的强势之处. 当然，也得承认，这时数学修养高，数理思维能力强者（不是只记住一些公式者）也是会更为得力的，因为数学思想本身即属哲学的方法论层次了.

至于第二步“建模”，是否仅是数学专业人士的用武之地了呢?

② 多年来的事实也表明，并非只有数学专业人士才长于建模. 其实数学专业传统的培养方案中并没有建模训练课，仅仅在于数学专业人士见识的数学表达式（模型）类型多一些罢了. 可是通常遇到的问题，高等数学知识就够了，数学专业的专业长处在这里并没有占多大优势.

再说，多年来国内国际正规进行的各类数学建模竞赛也很多，其中并没有表现出数学专业人士必然占优的强势规律来. 此即充分证明了上述观点.

(3) 在接受西方文明中，应注意发挥东方文明. 皆知“西学为用”的特点，这在西方人率先提出的自然科学中表现得尤为典型. 他们讲求实证、严格求证、技术性实现的风格是十分可贵的，值得学习，但是在学习西方时若能结合东方的重视思想升华、重视宏观思维的思维特征才是更为有力的.

从“二象论”来讲，西方显出的是“实象”强，东方显出的是“虚象”强，只有两者结合起来发挥“虚、实互动”作用才是最为得力的. 其实，在西方也不是纯粹的仅重实象，也有不少强调虚实结合的学派. 已知的西方一些大学把哲学与数学合在一个系，许多应用数学家都是哲学副博士等现象，即表明了这点. 特别地，在如今自然科学进入百尺竿头的情势下，已有越来越多的自然科学家致力于从东方思维中寻找出路，这更应激起我们发挥强项、提高思想修养.

第三节　公理化一瞥

粗看起来，你也许会认为数学的严谨性仅仅在于它的逻辑性，其实不然. 试

问哪一门学科（包括思辨学科）不是逻辑的呢？关于数学的逻辑特征留待第五章讨论，这里将表明，数学的严谨性远不止在逻辑．或反过来说，也是为了保证逻辑的严谨过程顺利实施，数学必须有它一套特有手段，这就是“公理化方法”．这也是本节所要讨论的中心议题．

一、古典公理化思想的产生

1．从一个故事谈起

这个故事是说，当年哥伦布在酒吧间受到一伙不逞之徒的奚落，哥氏为驯服他们，指着桌上的熟鸡蛋说“谁能将此蛋立在桌上?”……最后还是哥氏自己来解决了问题．只见他将蛋重重地往桌上一杵即成．原来哥氏的问题中并没有约定不能弄破蛋，但伙徒们不分析条件只凭“习惯思维”，模模糊糊地被制服．这说明要解决一个问题，条件分析是何等重要．换句话说，要保证一个问题有确定解或严格解、唯一解，其条件的严格性是何等重要．哥氏的问题即存在非唯一解，或说没有严格解．

生活中、游戏中这类问题还很多，下面还将看到一个直接来自数学的伟大错误．

2．第一次数学危机的教训

已经谈到，当年（公元前 5 世纪）毕达哥拉斯凭着直观经验，武断地认为一切线段的长都是有理数，也就是认为所有实数都是有理数，但很快就有人证明了如单位正方形的对角线长——$\sqrt{2}$，就不是有理数．它的严格证明在其稍后的欧几里德《几何原本》中已有了（请读者自证，反证法），从而引起了数学史上第一次危机—— **有理数危机**．

第一次数学危机的教训在哪里？那就是单凭直观、经验不可靠．这点对当时的哲学和数学都起到了警示的作用（请读者用公理化方法使毕氏结论严格化）．

3．数学需要公理化

（1）直观与数学．

不能不看到，人的思维也逃脱不了直观和直觉的影响或说人的思维中少不了直观、直觉[①]．为何一个抽象理论常常难以掌握？为何说为巩固微积分地位，整整辩论了两百年的关键是对无穷小认识的困难（且将看到，至今对无穷小仍未认清）？为何历史上不少重要成果，发表后还在发现错误？为何说数论三大世界难题的历史就是不断出现错误证明（往往很隐讳、难以发现）的历史？问题就在“不

① 直观是一种空间形象认识，直觉是一种抽象猜测能力．

直观”，错误往往出现在推理过程中思想转换或前提条件认识的含糊处，因为这时靠的只是直观或直觉思维，微妙难分．所以说我们一方面在理论中要尽力回避直观，以减少错误，但另一方面也不可能完全逃脱直观直觉．因此要有意识培养直观和直觉能力，因为它也应属于思辨能力，也是合情推理能力，数学思维也包括这种能力．数学家往往具有很强的直观直觉及合情推理能力，总的叫洞察能力．特别当这种直观、直觉能力与公理化方法结合，就更为得力了．

（2）公理化与直观．

直观、常识虽不可靠，但人们的思维往往逃不脱它的影响．怎么办？两千多年前的先知们找到了一个极为平凡的办法，没想到这个办法被数学沿用至今，一直未被突破，有的只是发展和完善，这就是公理化方法．如今公理化方法已推广到包括社会科学在内的整个科学研究领域．

朴素地说，**公理化**就是把隐藏祸患的、含含糊糊的（常常是直观认为可靠的）地方摆到桌面上来，当去掉的明确去掉、当承认的公开承认，使之明朗化．比如当初毕达哥拉斯在作结论时，如果把他认为直观“显然”的事实作为前提条件，“以人为地度量观察值为标准”而提出来，则他的结论就是正确的了．最多只能说还有超出人为度量观察能力的数，他还不知道，有待继续探索罢了．再如上述哥伦布问题中，如果伙徒们“懂得”公理化，要求把属于常识而未摆明的实事“蛋是否可被弄破”，提成公开的条例（这就是公理），他们也就不至于陷入尴尬了．

4．公理化几何的诞生

作为上述思想的继承和发展者，欧几里得（生卒不详，约为公元前 3、4 世纪）第一次用公理化思想完成了《几何原本》，提出了包括 5 条公理和 5 条公设共 10 条的“公理化体系”．尽管从今天看来它还不够严密，但其重要意义是开创了公理化数学的先河．

二、现代公理系统思想的产生

希尔伯特从 1898 年开始到 1899 年完成了历史性著作《几何学基础》．其中体现了如下几点思想：

（1）这是在产生于 19 世纪 30～50 年代的罗巴切夫斯基几何与黎曼几何等非欧几何的影响下，形成的思想．希氏也曾在 1891 年听过维纳的一次“几何学基础”讲演．

（2）这也是受 19 世纪 70 年代数学大爆炸发展形势影响的结果．

（3）希尔伯特深刻分析了欧几里得公理，指出它的缺点，并悟出更为深刻的内

涵，在此基础上提出了一套由5组共21条公理构成的**公理系统**.

（4）所谓“公理系统”是满足如下：“协调性、独立性、完备性”等“三性”的公理组．希氏提出的公理组即是“公理系统”.

协调性表示：公理集中各条例间无直接矛盾，且分别推出的结果也无矛盾.

独立性表示：公理集中两两间从函数角度讲，无线性转换关系；从几何角度讲，无交叠关系.

完备性表明了公理集的如下整体功能：

• 由此能完整地建立起一套几何学学科，其条例应不多也不少.

• 公理条件既不能多一条少一条，更不能改一条，否则就不是原来的几何学了.

• 即使如点、线、面等基本术语，也可由公理给出．正因如此，在《几何学基础》中的点、线、面不一定是欧氏空间的点、线、面，按希氏说法可以是凳子、桌子、咖啡，亦即完全成为抽象（泛指）对象了.

（5）希氏公理系统较之古典公理化思想是更为完善、抽象的，称为现代公理化系统，简称**公理系统**．特别指出，公理系统只是公理化方法中一种典型的、严格的形式，并非所有公理化过程都能得到公理系统，所以“公理化”与“公理系统”的概念是有区别的.

（6）“公理系统”思想很快被广泛地运用到现代数学中．比如20世纪初为解决集合论中罗素悖论引起的危机，人们立刻想到了或说创立了“公理集合论”即是一例（进一步见“四、4”）.

注：应当解释的是，为我们推崇的公理化和形式化似乎只是以希尔伯特为首的形式主义学派的典型特征，这与我们曾表示应对三大学派（第一节、三、4）的优点兼收并蓄，是否矛盾？否．首先说公理化、形式化虽然是形式主义学派的，但已是得到数学公认的思想．其次是我们承认公理化、形式化观点与承认直觉主义的实证论、模型化观点，以及承认逻辑主义的证明论、模型论观点并不矛盾．比如公理集合论的公理即是直接由逻辑主义学派提出的．特别地，本章提倡的公理化思想，更是融汇三派观点的，堪称广义的公理化方法．下面即在广义意义下进一步认识公理化概念和公理化思想，以武装我们的思维.

三、公理化、公理系统与形式化、形式系统的关系

1．公理、公理系统与公理化

公理是不经证明而直接提出来的命题或定义中的前提条件．其中“命题”有时也包括一些暂时无法证明而被命定的事实，比如非欧几何的“平行线公理”和

集合论中“选择公理[①]”等即是．公理一经提出，它在相应理论中就是“宪法”，就是真理．不过在应用数学中提出的“公理”一般都是容易理解的基本事实．进一步，若能设计出一套具有相容性、独立性和完备性的条例，使之能从纯数学的角度建立起一个，且仅建立起一个数学体系（记为 M），则把 M 的满足相容、独立、完备“三性”的公理集叫做 M 的“公理系统”（记为 S）或叫“公理体系”（S），把得到 S 的设计过程叫做 M 的典型的“公理化”过程．但是一般的公理化过程不一定能得到（严格的）公理系统．

形象地说，公理系统 S 好比数学体系 M 的“施工原则”．比如，线性空间 Z（定义见《线性代数》）即可看成是根据其定义中的几条公理（施工原则），分别在 Z 的基底及实轴上“取材”后“建立”起来的，却不能把线性空间的基底看做它的公理体系．因为 S 中的公理是 M 的规范，与 M 中的元素（理论成果）间是一般的因果关系，因而不只是线性组合关系．

2．公理化与形式化的关系

“形式化”是用公理化方法及抽象化、符号化方式去表征一个客观对象，以便数学对其作内在（纯数学）处理的过程，也叫做“模型化”．第一章已谈到，模型化所在的模型可以是一套数学表达式，也可以是一套条例界定的事务．它可以是来自数学内的问题、猜测，更多的则是来自实践的课题．

简单说，“公理化”加“符号化”等于“形式化”．

进一步，把形式化所得到的“模型”叫做形式化系统，简称**形式系统**．一个形式系统可大可小，大的如一个数学分支学科，小的如一个定理、命题、模型等．由此可看到在公理化、形式化与形式系统中公理化的基础地位了．具体来说是：

• 公理化用约定或声明的方式使客观系统摆脱与相邻事务间的牵连（或牵联），便于抽象成形式系统．

• 公理化用约定和声明的方式斩断那些具有含糊性，有碍形式系统严格推理的一些障碍．

• 但是，公理化不一定能保证形式系统的所谓完备性．

3．公理系统与形式系统的关系

公理系统对应于形式系统，但反之不一定．

根据上述概念易知，一个“公理系统”必然对应着一个相应的形式系统．但

① 选择公理是说“对于一族集合，可在每一集合中选择一个元素，构成一个新集合”．这看起来合理，但在“所有集合的集合”意义下，承认它与不承认它都得出离奇的、不可思议的结论．至今仍存在承认与不承认两派，后者属直觉主义学派．

反过来，一个形式系统不一定对应着一个（严格的希尔伯特式的）公理系统．因为，根据上述对形式系统的定义，可以说任何一个数学学科都是一个形式系统，但哥德尔不完全定理（见第一节、三、4）告诉我们，**有些形式系统并不存在公理系统**．亦即“公理系统”的存在与否是逻辑规律决定的，其困难不在于技术提取．比如初等数论、组合数学等所谓“枚举性数学”即不可能找出“公理系统”来．又如整个数学，也不存在其公理系统，这也是希尔伯特得到的一次教训．换句话说这些形式系统中虽然也用了公理，却不可能用一个（预先一次给定的）“公理系统”去决定它，而只能在过程中随不同阶段的需要作出相应的、局部的公理描述．

据此，我们把公理系统对应的形式系统叫做**完备的形式系统**，把一般公理化所产生的形式系统叫做**一般形式系统**，简称“形式系统”．

四、公理化思想（广义公理化）

至此，我们已对公理化手段的历史渊源、发展线索以及概念、特征等给出一个基本认识，虽不要求学会建立公理系统（提出公理组，证明其协调性、独立性和完备性），但若能接受其启示，形成一种思想方法，亦为所求．如今这已是泛及数学各个分支（乃至整个科学界、社会界）的一种基本思想了．

所谓公理化思想，并不要求建立严格的公理系统，只要我们能在分析实际问题时，凭着需要随时能想到建立数学模型、作形式化处理，随时能想到公理化方法，以使模型变得更为严格即可．从这种意义上说，公理化“思想”也可说成是**广义公理化**方法．具体说这种广义性表现在以下几个方面．

1．“定义”中的公理化方法

注意到在数学的形式系统中所用到的定义，其叙述方式都是公理化的，比如：

例 2　一般拓扑空间定义：

记 X 为一个集合，$\tau \subset 2^X$（X 的幂集），若满足：

（1）$X, \varnothing \in \tau$；

（2）任意有限个 $A_i \in \tau$，皆有 $\bigcap_i A_i \in \tau$；

（3）任意多个 $A_i \in \tau$，皆有 $\bigcup_i A_i \in \tau$，

则 τ 叫做 X 的拓扑，X 叫做以 τ 为拓扑的一般拓扑空间，也叫做点集拓扑空间，简称拓扑空间，记为（X, τ）．

这里（1）、（2）、（3）即是其公理组．特别地，根据“公理就是约定、声明、限定”的含义，第一句中“记 X 为一个集合”和“$\tau \subset 2^X$”也都是公理．

凡是公理化定义都可作为形式化系统的严格依据．事实上，一般拓扑学正是建立在这一定义上的，因此这类定义的确具有公理化特征，叫做**公理化定义**．

与公理化定义对偶的另一类定义叫做**描述性定义**．它不具有形式化系统的严格性，比如对“数学”本身的定义即是这类描述性定义．显然，社会科学中还广泛存在着描述性定义．

2．数学理论中的定理、命题叙述都具有公理化形式

从广义上讲，数学中一般定理都是一些公理化形式系统，它们的条件即是其公理．甚至由于定理相对于它的结论来说是个完备系统，其条件（公理）也是自然满足协调性、独立性的，所以也可说定理中的条件（公理）是个“公理系统”，从而也说明一个定理是个“完备的形式系统”．

例 3　微分中值定理（拉格朗日型）．

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立．

这里的两个条件就是该“形式系统”的公理．由于这里结论是能严格证明的，所以说这个建立在两个公理上的形式系统是“完备”的，从而所依赖的公理也构成“公理系统”．不过严格说，其中的符号也应该作独立地约定，因此也应该属于公理，与所指出的两个公理一起才构成公理系统．

又，该定理还可叙述成更加符号化的形式：若 $f(x)\in C^0[a,b]$，且在 (a,b) 内可导 $\Rightarrow \exists\xi\in(a,b)\ni f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$．符号自明．

注：数学以外其他学科中有些命题不是公理化的，最多可说具有公理化架势．比如命题：“人必须吃饭”．从形式化角度讲，这里有许多不严格之处．首先作为“公理”的人即不确切，比如死人则无须吃饭；其次饭的概念也是模糊的．也许一个接受过形式系统训练的人会这样叙述：一切活着的人都必须接受营养．但还应声明这里把“人”和“营养”作为基本术语来接受，这样才算有公理化特征．

3．一般的数学模型叙述都是公理化形式（例）

这里仅举例说明．

例 4　经济学上有名的 $C-D$ 生产函数为

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta}\quad(\alpha+\beta=1)$$

其中　Q—— 生产量（或生产值）；

K—— 投入要素之一：资金；

L—— 投入要素之二：劳动；

A—— 调节系数，表明科技进步等管理因素对生产的作用．

显然，从公理化意义讲，各符号的解释和两个等式都是公理，它们共同形成一个形式系统，也就是一个数学模型．

例 5 用公理化方式叙述经济学上有名的阿罗（Arrow）不可能性定理（1951年）．

第一组公理：

（1）社会事物无限多，记为$\{G\}$．

（2）社会成员有限个，记为$\{1,2,\cdots,m\}$．

（3）对$\forall g\in\{G\}$作决策时，存在多个方案，记所有事物的所有方案集为$\{R\}$．

（4）方案间存在偏好序关系$>$、$=$、$<$，具体序关系因人而异．

第二组公理：

（1）i员的偏好为映射$f_i:\{R\}\to R_i$，$i\in\{1,2,\cdots,m\}$，R_i为i员赋予$\{R\}$中元素间的一种偏好序关系．

（2）全社会的偏好序集为$F=\{f_i\}_{i=1}^{m}=\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}$．

（3）记映射$\varphi:\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}\to R$（决策）．

（4）社会选择为复合映射$\varphi\circ F:\{R\}\to R\in\{R\}$．

第三组公理：

（1）$m>1$，$\#\{R\}$(方案个数)>2，φ的定义域为

$$D(\varphi)=E\times E\times\cdots\times E=E^m \text{（}m\text{ 维欧氏空间）}$$

（2）社会评价与个人评价之间具有正比关系．

（3）无关方案间有独立性，即偏好序改变后，未变部分的关系在社会决策中仍不变．

（4）社会成员充分自由．例如，取$\forall x,y\in\{R\}$及符号$>$，必$\exists\varphi\in\{\varphi\}$ $\ni\varphi(x,y)=x>y$．

（5）非独裁性．例如，若i认为$x>y$，而全体认为$x<y$，则只能决策为$x<y$，否则叫独裁．

阿罗定理则是说：“在第一、第二组公理下，第三组公理是矛盾的”．亦即，首先三组公理构成了一个“数学模型”，然而从另一方面看，三组公理是无矛盾的，但实际上能推出矛盾来，所以它不能构成“公理系统”．

4．一切数学学科都是公理化的

因为一切数学学科都是由公理化的定义，公理化形式的定理及引理、推论等命题和随时随需要而引入的新概念以及新的符号、约定、限制等，再加上推理过程而成的**形式系统**，因此可说成是建立在一系列的公理基础上的，所以说是**公理化**的．但若这一系列公理不能事前一次给定，则很难论证它们间的协调性、独立性和完备性．特别因为哥德尔已用具有实证性的迭归方法无可辩驳地证明了数论的公理集不构成公理系统，则整个数学也就不是个公理系统了．至于它的学科，也不能轻易说成是（严格意义上的）公理系统，但是能够广义化地说成是"公理化"的．

进一步，据"三"分析，形式系统分作**公理系统**和**一般形式系统**两类，由此可将所有数学分支、领域分作"公理系统"和"形式系统"两大类．前者是以希尔伯特《几何学基础》为典范的公理系统学科，比如《数理逻辑》学也属于这一类．虽然其他学科没有严格按《几何学基础》的方式去写，但也不能说一定不再有这样严格的公理系统学科，因此我们说这是一"类"．而一般形式系统学科则是除了公理系统类以外的全部数学系统．一般形式系统虽然没有一开始就提出一套公理集，并证明它们的相容性、独立性、完备性，但正如上述它们在叙述中处处体现了公理化思想．例如，任意翻开一本点集拓扑学即可看到它由一系列的公理化定义和定理构成，诸如开闭集、聚点、邻域、收敛、拓扑空间、拓扑基等定义．即使拓扑空间下面，还有诸如粗拓扑、细拓扑、相对拓扑、诱生拓扑、度量拓扑等进一步的概念，以致很难统计出究竟一个完整的点集拓扑学有多少个定义（公理）．至于定理（包括性质、引理、推论、命题等，下同）也是一系列的，而且这里的定义、定理不是集中给出，仅是沿一个思想线索逻辑地把它们串起来的．何时应该加入一个定义，何时能得到一个定理，都是依此逻辑体系来决定的．它使得整个理论系统就像长江流域，由一系列有着逻辑顺序的源流逐步汇聚成洪大的巨流．不难看到诸如我们熟悉的线性代数的理论结构和微积分学的理论结构等不都是这样的吗？这些都属于一般形式系统类型．

这里还应该看到，在数学中本质上任何一个定理都是由该学科中有关定义产生的结果．换句话说，数学中任何一个定理（或叫命题）都可经由有关定义而推出，只是往往来得比较笨（繁琐、不经济）罢了，当能借用别的定理而获得结论时，往往比直接从定义出发更省事．例如，若由定义 1 推出了定理 1，定理 1 推出了定理 2，……，定理 $n-1$ 能推出定理 n，这时如让我们证明定理 n，则谁都知道直接用定理 $n-1$，而不必从定义 1 证起，尽管都知道其中任一个定理本质上都是定义 1 产生的也罢．当然这只是一种"特征化"了的叙述，事实上理论过程是错综复杂的，上述实质并非一眼能看穿．

最后我们还可以把上述公理系统和一般形式系统下的理论结构分别表作如图 2.6 和图 2.7 的特征．图 2.6 表示公理系统下完备的形式系统，图 2.7 表示一般形式系统．

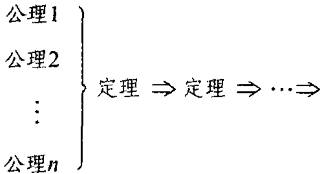


图 2.6

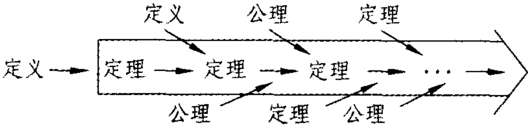


图 2.7

五、公理化赞（代小结）

至此已可见，公理化方法是何等的容易、何等的平凡，公理化思想是何等的朴素、何等的简单．

正是公理化方法使数学合情合理地升离了实际，摆脱了实践中各种说不清楚的纠缠；

正是公理化方法抽象出了模型，架设起了形式系统，使数学世界别具威严；

原来公理化正是数学严格推理的前提保证，是数学严格性的秘诀体现；

没有公理化就没有形式化，没有形式化就没有数学化，没有数学化就没有实践的精确化，好一幅通连实际与数学的铰链；

伽利略说，“自然之书数学写成”，原来数学之书说易则易、说难也难，公理化意识则是其中一大关键．

啊！

是公理化方法折射出了数学之美，

是公理化思想托起了数学半边天；

让公理化思想进入我们的意识吧，

让公理化思维提高我们的觉悟吧，

让公理化方法成为人生事业的得力手段！

第三章　数学中的几个基本特征

两千多年的数学时空婉如一只万花筒，不管从哪个角度看上去都有着五彩缤纷的世界，这令我们欣赏不已. 本章将从本著的宗旨出发，简单认识一下数学中的几个基本特征. 所谓“数学中”，即从数学内或说纯数学角度来看.

第一节　数学的基本对象：集合

今天，人类终于认识到数学的基本对象是集合，由于集合的基本概念和一般运算已经普及，这里仅从另一角度谈谈对它的认识.

一、集合认识简顾

虽然说集合是数学的基本对象，但集合概念却迟至 1873 年才由康托尔提出. 当然这并不奇怪，它正好印证了人们说的“数学大厦常常是先修好楼层再打地基”的说法. 的确，仅当集合概念出台，人们才在现代数学的思想下看出“集合是数学的基本对象”、“集合是现代数学的奠基石之一”的实质（另一奠基石是逻辑），有人还把集合的“生日”1873 年 12 月 7 日看做现代数学的开端.

具体说，自集合概念产生以来，它对数学的主要功绩可列出如下几点：

(1) 正是在集合概念被提出后，人类对数学实轴的认识才产生了本质性的突破，并产生了“集合论”这一数学分支，这使得人类对实数的认识进入到现代历程阶段（关于集合论，续见第六章第一节）.

(2) 正是集合论触动了数学之真谛，它产生的连续统假设（第六章）及与选择公理、ZFC 公理的关系等，至今还是数学的一个“魔三角”，仅其中“一切集合之集合”假设引发的悖论（通俗地叫做“理发师”悖论）亦带来了数学的第三次危机，直接产生了数学寻根—— 探寻“数学基础”的热潮，并且与由此产生的“数学哲学”三大学派及其贡献，共同形成了现代数学的特色.

(3) 正是集合概念的引入和对实轴认识的深入，使得人类对“无穷”的认识

也产生了突破性进展（续见本章末节）.

（4）特别地，在现代数学中乃至可以说在现代出版的一切数学著作中，集合这一术语也得到广泛应用，并作出实质性推广（见下段）.

二、集合概念及其引申

奇怪吗？尽管如今集合概念业已深入到数学的各个“角落”，却连集合的定义都还未统一．其实也不怪，因为“集合”的定义不必是公理化的，只需描述性定义即可．而描述性定义统一与否并不影响其理论的发展，所以集合定义的讨论与集合论的发展是可以并行的．不过现在人们对“集合”定义的统一性并未显出多大兴趣．一般可以定义为：由有限或无限多个互不相同的元素构成的整体叫做集合．这里“元素”即在相应研究宗旨下最基本的个体（按康托尔的说法是“在直觉上或思想上能明确区分的对象”）.

事实上，集合概念在数学中，除了以实数认识为背景的“集合论”及其发展成的公理集合论是直接研究集合的，一般都是研究其引申概念，或说增加了某种（公理）限制的集合．比如近世代数（也叫抽象代数、代数学）中群、环、域、体、代数等概念的定义中都有这样的格式：“*是这样的集合，其上有运算ΔΔ，这些运算分别满足××、××定律”.

例 1　群的定义.

群是这样的集合 G，在 G 内有运算“$\cdot$”（或“$+$”），满足：

（1）该运算下 G 中有**单位元**或叫**幺元**，记为“e”（或“θ”），使得

$$e\cdot a=a\cdot e=a,\quad \forall a\in G\quad （或\ \theta+a=a+\theta=a）$$

（2）$\forall a\in G$ 皆有**逆元** $a^{-1}\in G$，使得

$$a\cdot a^{-1}=e\quad （或\ a+a^{-1}=\theta）$$

（3）该运算满足**结合律**：$\forall a,b,c\in G$，有

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\quad （或\ (a+b)+c=a+(b+c)）$$

注意到按此定义，G 中元素已不一定是数，而是个“抽象元”，其运算也不一定是数字的乘、加运算．因此这时两种运算也可一并抽象成（比如）一个“$\cdot$”．这时上述定义便可以简单地说成：“群 G 是具有单位元和逆元的，且对“$\cdot$”运算封闭的集合”（$\forall a,b\in G$，有 $a\cdot b\in G$，则叫运算“.”对 G 封闭）.

总之，不管怎么叙述，“集合”二字总不可少，无非是说“群”是一种特殊的“集合”.

此外，还应该提到一个属于现代应用数学方法论的，在社会、科技领域广为流行的概念——系统．原来“系统”也是一种特殊的集合，只是这时的“特殊”（其定义的限制条件）不具有公理化的功能，仅具有公理化的架势而已．所以仍只能说系统的定义是描述性的．正因为系统的定义是描述性的，所以它不能左右系统论的发展，因此它可有不同的定义．据说系统的“定义”至今已有好几十种．现列出我们的如下定义：

例 2　系统定义．

系统是满足如下条件的一类集合 S：

（1）S 具有一个特定的目标 J；

（2）S 具有元素集，记为 X；

（3）S 的所有元素间具有特定的关系，这种关系是由 J 决定的．

比如，一辆汽车是个机械系统，其目标 J 是运输（负重运动）、所有元件（元素，记为 $X=(x_1,\cdots,x_k)$）为着共同目标而紧密相关，记为 $J=S(x_1,\cdots,x_k)$．当然，对于具体的 J，还可有具体的 $S(X)$ 结构式．又如，人体是个有机系统，设其目标是生活（既要生，又要为生而干活），则所有器官（元素）都为着共同的目标（生活）而协力合作……

特别地，容易看到数学中各种“特定集合”（如前述）也都满足系统的定义，因而也可叫做系统．而且由若干特定集合（系统）构成的特定集合仍然是系统，所以“系统”一词在现代数学中也广为运用，诸如代数系统、分析系统、动力系统、数学系统等．

三、集合与空间

皆知，数学被定义为“‘数’与‘形’结合的科学”，自然认为“形”是隶属于“空间”的，因而最早认识的是空间而不是集合，且空间概念由感受到的自然空间推广到欧氏空间，再引申到种种非欧空间．这时（近现代），在有了“集合”概念时，更意识到，原来空间也是一种集合，亦即“集合”才是最基本的概念．不过由于“空间”一词更为形象，所以也常用．通常，“空间”与“集合”可作等价运用，但也有如下两种类型的差异：

（1）当“空间”前面冠有修饰词时应该叫空间，具体叫××空间．比如拓扑空间、线性空间、Banach 空间、Hilbert 空间、概率空间等即是．这些都是具有严格公理化定义的概念，但少不了还是“一种特殊的集合”．比如已经叙述过的拓扑空间（第二章第三节、四）即是“这样的一个集合 X，由它生成的拓扑（基）$\tau\subset 2^X$，满足其‘三条公理’．”特别地，比如在某种意义下为描述机械系统也可定义“机

械空间”：$(X,2^X)=$(机械要素，加工工艺)．

（2）当“空间”一词前没有修饰词时，即表示一个集合，而且是一个泛指的集合．它常常在口语中出现，并没有严格的公理化定义．比如说“记Ω为全体序列构成的空间，我们现在在Ω上定义距离……”．“$C[a,b]$表示$[a,b]$上所有连续函数构成的空间，……”等，其中用到的“空间”系指一般集合，或说平凡的集合．

四、集合元素与数学的抽象性

1．经典数学的抽象性

这也就是通常所说的数学的抽象性．因为数学中的“数”总是从客观实际**提升**（抽象）而来，不是平移过来的，所以从这个意义讲数学总是抽象的．

具体说，由于数学研究的对象，总的可叫做**模型**或叫做**问题**，那么这类问题按其量纲的抽象性层次可分为三种：

（1）一种是带有**通常量纲**的问题．其实这只是一种狭义的应用问题，在数学正规内容中很少，常常只在例题或习题中出现．比如，物理学问题、工程计量问题等．当然，作为数量问题已经是对（非数的）实际对象的一种抽象了，算是一种初级的抽象．

（2）另一种是带有**相对量纲**的问题．比如在统计学上常常需要对若干不同量纲的量作比较，这时多采用所谓“无量纲化”的措施将其化为百分比来考察，如概率值、权值、模糊值等都是这类问题．实际上它也潜存着一种量纲，我们把它叫做“相对量纲”(参见拙著《社会度量学导论》)．

（3）再一种是所谓**无量纲**问题，这就是正统的数学内容所研究的问题．相对于前两种问题它最为抽象，它的模型常常是数理模型或形式化程度更高的抽象形式．其结论一般是公式、定理，因此具有更广的应用范畴．

注：不过上述“无量纲”说法也非本质．因为比如一个函数$f(x,y)$不管它的表达式多么复杂，式中的x或y只能分别在其数轴x或y上取（变）点才行．这就说明它们实质上有个（自己坐标轴上的）“单位制（量纲）”．例如，抽象数学中要求三角函数变量皆取弧度，为什么？这就是比如$f(x)=x\sin x$仅当$\sin x$中x取弧度时，才能与第一因子x间具有同一坐标轴上的单位制，才能作通有运算．

2．现代数学中元素的抽象性

现代数学已大大超越了数的概念，不仅由数量（数字）提升为变量（字母）、模量（函数)，而且扩展为一般对象．比如“群”定义中的元素即是泛指的，既可以是函数、矩阵，也可以是运动体、商品或市场等．又如，泛函空间也可用实践

中种种对象集来直接定义，不一定要通过数量转化而成；拓扑空间的元素也不一定是坐标系下的（量化了的）几何对象. 特别地，几何学的元素也不一定是点、线、面，而可以是抽象对象，只要它满足 Hilbert《几何学基础》中的公理系即可. 因此说，“现代数学”是在数学的一般抽象性（数的）基础上的进一步抽象.

3. 集合概念的运用正好符合现代数学的抽象特征

这是因为，从集合的定义（尽管未统一，但都承认）是“若干元素构成的整体”可见“集合”、“元素”都是泛指的，或说是抽象的，因而除了数以外，它还可以用到任何对象上.

当然，仅从“集合”的概念看，似乎太泛义而成为平凡的了. 所以正如前述，在数学中用到的“集合”常常是赋予了公理限制的“特殊集合”. 但不管怎样，集合的最为典型的“抽象性”却是始终保持着的.

第二节　数学的基本关系

“关系”是任何系统的生机和活力，没有关系就谈不上系统，关系愈丰富、愈深刻、愈复杂，则系统愈高级、愈活跃、愈完善. 数学，不管从它的总体还是学科来看，都是高级系统，因而“关系”也是它的重要特征. 没有了关系，数学即成为仅有“数”而无“学（探讨规律）”的东西了. 反之，有了关系，则“数”不仅是数（量），也可以是变数、模数（即模量）、函数，从而成为“数学”了.

数学系统不仅在于维持、演绎着它的关系，更在于开发、创造着新的关系. 利用关系可从已知推无知，从有限探无限，从关系推关系，从而使得数学系统日益复杂、完善.

显然，数学中的关系不可一一枚举，但其中最基本的是（两个对象间的）“二元关系”，下面即从二元关系角度，归纳一下数学关系中的几种基本类型.

一、序关系

古人之所以创造“数”，也许只是为了“序”吧. 因为“序”关系在社会生活中太重要了，而一旦表成数，就能精确地表现其“序”关系. 可是，数学的发展却每每突破了“序”而不得不为了“序”再作新的创造. 因此，对“序”关系的认识既成了数学发展的绊绳又成了它的试金石. 本来嘛，只要能满足社会对“序”关系的要求，没有数学也是可以的. 但这能行吗？……所以不得不从数学角度来

深刻认识一下序关系.

序关系本是实数的基本关系，更是有理数的基本关系，因而是数学中最为古典的关系. 发展至今它仍然是现代数学中最为基本的“二元关系”之一，这就是=、>、<所表出的序关系（一般简记为≤关系）. 不过正因为它很重要，今天已被发展、推广成多种形式的序关系及公理化的序数理论等，现列叙于下.

（1）集合间的序关系.

这就是包含⊃、被包含⊂和重合=关系.

（2）在逻辑学中的推广.

此即“⇒”，表因果关系，自然也是个序关系.

（3）用序关系来描述集合的特征.

这就是**序空间**概念和**序数**概念. 例如:

定义（序空间） 对集合 X，设≤为其上二元关系，若有 $a,b,c\in X$，且满足三公理:

(i) 自反性: $\forall a\in X$, $a\leqslant a$;

(ii) 反对称性: 若 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则 $a=b$;

(iii) 传递性: 若 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$，

则≤叫做 X 上的序关系，$\{X,\leqslant\}$ 称为**序空间**，X 称为**偏序集**.

若 $\forall a,b\in X$，都有序关系，则 X 叫做**全序集**. 比如，除了大小关系、整除关系外，事物集之中的相等关系、包含关系等皆满足序空间三公理.

（4）把“=”关系推广成“等价关系”.

把集合 X 上满足自反性、对称性、传递性的所谓“等价三公理”的二元关系都叫做**等价关系**.

（5）代数学中“格”也是赋予了特殊序关系的集合（见第三节、一）.

（6）泛函映射.

设 X 是一个集合，则泛函映射 F 可定义为

$$F:X\to R\ （实数集）$$

其思想是，为了把纷繁、复杂的对象集变成可比较大小的“全序集”，人们采取了一些手段使之变成一个个的“标量”，也就是把它们都映射到实轴上去，即可达到目的了. 这里“手段”可以是一些简单的标量函数，但实践中常常不那么简单. 比如管理科学中的评价（映射），甚至可能由专家仅凭经验来做心理“赋值”. 它也是一种映射，但谁也说不出它的映射式来. 即使数学上常用的对向量作加权平均、对向量求模、对矩阵求行列式、对函数求定积分等也都是一种泛函映射，所以我们可把这一类“映 X 入 R”的映射，统称做“泛函映射”.

显然，泛函映射正是数学中寻求序关系的一大类手段．应用数学中更需要作泛函映射，因此我们应该对**泛函映射**产生悟性，上升成意识（以后还将谈到）．

（7）序关系可直接引申到应用界．

例如，经济学上的偏好关系：⊜、⧀、⧁或⩽⃝即属序关系的引申．相信读者还可在你的专业中举出（或创出）更多类似的引申例来．

二、运算关系

不管是初等数学还是现代数学都少不了运算．不过随着历史的进展其运算概念也在推广，运算方法也在增加，现略叙于下．

1．数学的基本运算方法

（1）最基本的运算：加“＋”，乘“·”．

第七章将表明，加、乘不仅是数学中最基本、最重要的运算，而且也是客观世界中十分基本而普遍的结构关系．

（2）数量性运算方法．

数量性运算方法系指加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数等运算，简称“八则”运算．它源于古典数学的运算，经推广成为（表示数字的）字母在相应条件下的运算，以及表示数量的函数式（在相应条件下）的运算．

（3）微积分运算．

如今出于微积分运算之普及性和完美性、简易性，被数学界赞誉为“已经算术化了”．的确，可以说在微积分学诞生以来的所有数学分支中，还没有哪一个分支的特有运算方法在（普及性、完美性、简易性）特征上超过了它，所以这里将其归入基本运算方法之列是合理的．加上上述“八则”运算，统一把它们叫做“十则”运算．

须知，十则运算皆可归为“+、·”及其逆运算的推广．比如指数、对数是在对数概念下的“+、·”运算；微积分是在无穷意义下的“+、·”运算等．

2．数学的基本运算形式

这就是等式和不等式形式．从空间来说，前者是降维的，后者是保维的；从特征上说，前者表恒等运算过程，后者表保序运算过程．它们都可用于数量和模量（函数），但对于非数量性的对象（事物），则属其推广形式．比如对于关系⩽⃝或“≻”抑或“⇒”等关系下的运算，常常需要根据具体对象，补充一些运算规则方可实行．这需要根据实际情况灵活处理，只要掌握了基本思想，剩下的就需要自己创造了．

3．运算方法的推广

这里将谈到，这种推广主要是对＋，·两个最基本运算方法的推广，例如推广成⊕，⊗，∨，∧或∪，∩等（参见第八章第四节）.

4．数理逻辑运算

数理逻辑是数学的一个分支学科，它用一套固有的公理体系，包括一套“原子符号”（诸如连词、变词、常词、量词、括号、关系等）及一套“原子公式”，构成自己的独立运算体系．这也是数学基本运算的一种推广．作为数理逻辑学来说，这些就是它的基本运算.

三、映射关系

1．概念认识

可以说“映射”是数学中最为基本、最为普遍的一个概念，可谓“家喻户晓”，包括“运算”也是一种映射．由于“映射”的定义属描述性的，这里就不作统一的叙述了．事实上，“映射”是一类因果演化方式的形象描述，一般形式可表为

$$\varphi: X \to Y(x \mapsto y = \varphi(x))$$

这里“因果演化”表明：集合 X 中的元素 x（因）按确定的方式（或叫规则）φ 转化为集合 Y 中的元素 y（果）．此外，这里的“因果演化”与一个定理的因果推演（证明）也是有差异的，所以“映射”只能算“一类”因果演化.

也可以把数学定义为“研究映射关系和映射变换下的不变量和不变性的科学”．由此可见“映射”在数学中的基础地位了.

2．映射与函数

一般说，把“映射”概念视为与“函数”概念等同是不算错的．但是细究起来，它们的含义也并非完全等同，仅仅是有较大共通性罢了.

学习经验告诉我们，对于似乎等同的概念应尽量寻找它们的区别；对于似乎不同的概念，应尽量寻找它们的共同点，这才有利于明晰概念、掌握实质.

现在即来谈谈映射与函数的区别.

（1）含义上的差异．如果把 $\varphi: X \to Y$ 示意成图 3.1，则可见，如果把 φ 视作**映射**，一般是强调在 φ 下 X 集与 Y 集间直接的因果关系．比如拓扑学中的“连通定理”是说，$\varphi: X \to Y$ 是连续映射，X 是连通空间，则 $\varphi(X) \subset Y$ 也是连通空间．这时习惯于用“映射”，表示这里 φ 的具体表达式并不重要，只要它连续即可．但是，

当把φ说成**函数**时，习惯上即在于强调其表达式，也就是这时比较强调其“图空间”（即图3.1 中乘积空间 $ABCD=X\times Y$）中的φ曲线，亦即强调X是经φ曲线而“映射”到Y的．比如微积分学中核心的四大定理（魏尔斯特拉斯覆盖定理、微分中值定理、隐函数存在定理、格林函数）的叙述中就习惯于说“函数”，因为它们需要强调函数（曲线、曲面）的形状特征．

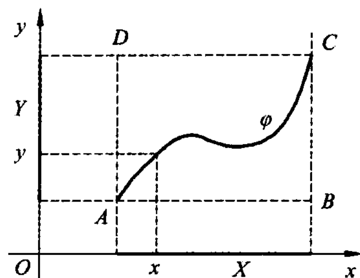


图 3.1

（2）应用范畴的差异．

从应用范畴来看，将“映射”说成“函数”是较为狭义的．它常常仅指能写出函数表达式或强调函数式特征的情形，而说成“映射”则较为广义．它既可表示已经形式化了的映射关系，也可表示未经（难以）形式化的映射关系．比如可说建模活动也是一种映射；从实践中提取某种信息也是一种映射；所有生产过程也是一种映射；专家凭经验对某事物给出评价、打分也是一种映射；甚至一切因果演化都叫做映射．事实上序关系和运算关系也是一种（二元）映射，也可以用映射的方式来叙述它们（兹免）．

此外，现代数学中常常接触到的算子概念，其实也是一种映射，只是算子是指（抽象）空间到空间（包括到自身）的映射．在空间意义下算子和映射没有本质差异．

总之，我们从应用范畴来看，函数和映射间可说一个是狭义的、一个是广义的．这是它们的又一个区别．

第三节　数学的基本任务

已谈及，然而最终说来，数学执行的任务（叫做基本任务）莫非就是“解”、“证”两大类型，现分别作进一步认识．

一、“解”

“解”也叫解算，亦即可分为“解”和“算”两个方面内容．

“解”包括各类方程的“解”，诸如解各阶代数方程，解各类微分方程、积分方程、函数方程、算子方程，解各种超越方程等．它们都已构成学科分支甚至学科群．

至于“算”，可分为数字的“计算”和文字符号的“推算”．仅就“计算”来说，它可是历史最为悠久的，如今运用最为广泛的、最为普及的数学．它是建立在加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数“八则”基本运算及（后来又加上的）微分、积分等共“十则”基本运算上的．

从根本上说来整个数学也是建立在这“十则”运算上的，无非是它们不同形式的推广和引申罢了．所以“算”始终是数学的基础和根本．

特别地，在电子计算机时代，更赋予了“计算”以活力，深化了“计算”的功能，扩展了“计算”的世界，比如越来越庞大的现代信息科学即是典型一例．

再说，各类方程的“解”过程也无非是一些“计算”（或叫推算）过程，却也是从计算中升华出来的．比如算术中的所谓难题，一旦纳入代数中（用上代数方法），往往会变得更容易解决．说明“解”与“算”两个同类概念之间存在一种（上下）层次关系，所以说“解”是“算”的升华，可以用“解”来做该类的代表．

须知，“解”类任务的特点是技巧性特强．特别是“初等数论”问题，已知它往往是“易进难出”的，为解一个问题，常常需要探寻新方法、创造新技巧．“数论”也是数学人显露“聪明”的一大领地（在今天，已“被”教育“化”了的诸如“奥数班”、“华数班”之类也不少取用“初等数论”中传统技巧问题去培养“天才”）．

最后说，“解”类任务不仅在17世纪前是数学的全部，即使在今天也因计算机科学的刺激，至少是数学的半边天．

二、“证”

“证”也叫逻辑证明，简称证明，包括纯数理逻辑的（演算式的）“推证”和希尔伯特的（“夹叙夹议”的）“证明”．其任务是解决各类定理（及其引理、推论）和“猜想”之类命题的证明．比如高等数学中有命题“闭区间上连续函数必有最大、最小值”就是个定理，需要作逻辑的证明．一旦证明了即可应用之，包括其思想．比如当用到社会对象上时，只要认为该问题是确定于“闭集合”上的，且认为（或叫赋予）它是个连续映射问题（不必具体给出函数式），即可说它是有最大值的了．

“证明”得到的成果往往不是数而是一般事实，形成的是理论，应用更为宽泛（*注：科学生活中应该分清证明、说明、论证、证实与实证等概念的关系及其用场*）．

现在来谈谈“解”与“证”的比较特征．此即：①从空间形式上看，“解”类问题表现为一种“收敛性”，其结论将收敛到更低维、准确的对象上去；“证”

类问题则表现为一种“发散性”，其结论可应用到更广范畴．② 从精确性上看，“解”具有数值的精确性；“证”的精确性主要表现在严格的逻辑推理上．③ 从创造性来看，“解”表现为技巧性强，即使其计算方法中也往往透露出较强的技巧灵光；“证”则表现为思想性强，重在理论创造，需要的是思想高度，因为“思想高度决定思维深度”．

尚须指出，在数学中“解”和“证”两个基本类型任务并非一定是分割开来的．一般说在同一数学分支中，往往“解”和“证”都需用、都在用，只存在运用率的多少问题．甚至可能一个定理的证明，本身属于“证”类，但常常是用计算或推算（解）来得证的．

总之，根本上说来数学是用来解决问题的，从这一角度说，它是工具、是手段，但确切说它是“软工具”，也就是“方法”．数学中似乎充满着奇妙的方法、技巧，令人望而生畏．但不用怕，这些本是历史上多少代“聪明”人的创造累积下来的，且已被前人消化、整理成最直接、最简单的形式了，已成固定的方法了．掌握了这些方法的人都是“聪明”人，特别是若能把这些方法上升成思想，成为“方法论”将更为得力．

第四节　数学的基本结构

数学有三大基本结构：序结构、代数结构和拓扑结构，且已成为一个公认的常识．这是有名的布尔巴金学派的重要贡献之一．布尔巴金学派是希尔伯特数学哲学学派（形式主义）的继承者，它秉承希氏的公理化思想，去认识数学的基本对象——“集合”的各种特征，从而提出了三大结构．现代数学正是在此结构概念下的继续深入．正是种种不同的公理限定把数学作出各种分类，从而编织成一个层次纷繁、错落有致的密网，形成了数学这座瑰丽大厦的总体结构．

不过我们也看到，这里的基本结构实质上就是我们在第二节谈到的基本关系，只是强调的角度有些不同而已．因此本节只需简单阐明三大基本结构的突出特征即可．

一、序结构

布尔巴金把序关系公理化地界定成满足自反性、传递性、反对称性等“三律”（也叫三公理，见第二节序空间定义）的二元关系“$\leqslant$”．自此，符号“$\leqslant$”已不仅表示数间关系，而且被“三律”抽象成一般事物间的关系了．比如经济学上偏

好关系即已包含在其中．进一步，布尔巴金还总结并揭示出数学在**集合**意义下的丰富的序关系，并把序关系分为所谓“良序”和“偏序”两种，总的把它叫做数学的**序结构**．具体说，集合的序结构研究主要可分为以下几个方面的内容．

1．对偏序集的一般研究

如前述，一个集合 X 成为偏序集或偏序空间 $\{X,\leqslant\}$，其充要条件是 X 上至少有一些元素，其间存在序关系．比如自然数集之中整数间的关系即是一例．研究表明任一 $\{X,\leqslant\}$ 上皆有**全序子集**（任二元间皆有序关系的子集）．同时提出了：

Zom 公理　任一 $\{X,\leqslant\}$ 皆有最大的**全序子集**（概念请自述）．

由此给出：

Zom 定理　若偏序集 X 的每个全序子集都是 X 的真子集，则 $\exists x_0 \in X \ni X$ 中与 x_0 有序关系的一切元素 x 皆有 $x \leqslant x_0$．

这就为集合中是否存在极大元素、最大元素的判定提供了一个理论依据．

2．对偏序集的“格”研究

在 $\{X,\leqslant\}$ 上加上公理条件：

$$\inf\{a,b\} \in X, \quad \sup\{a,b\} \in X, \quad \forall a,b \in X$$

则称此特殊的偏序集为“格”．格是同时具有序结构和代数结构的复合结构集合（格的代数定义见第八章第一节、三）．

从格的复合结构出发的研究不仅是代数学的问题，也已引申到数理逻辑、泛函分析和拓扑学、模糊数学等重要学科．比如 Boole 代数，就是由格深化而成的所谓有补分配格（$\forall a \in X$ 皆有所谓“补元”，且运算满足分配律的一种格），它是计算机科学上一个十分有用的逻辑学分支．自然，它也是一种具有特殊偏序结构的集合．此外，比如格上的拓扑学、格上算子理论以及模糊格、模糊拓扑等都是应用“格”概念的基本领地．

3．对“没有”序关系的集合的序处理

比如向量空间中的元素之间则没有序关系．进一步，任一事物构成的集合中也无序关系．比如一个班集体成员之间、全国各省之间，甚至不同属性的专业，如医生、教师、技术人员、艺术家之间的单位劳动值，严格说皆没有序关系．但我们说总可以作出“泛函映射”（第二节已谈及）把集合中每个元素映到同一实轴上去，从而利用实轴的序特征使原集合形成偏序集甚至全序集．

总之可以说，在“泛函映射”的意义下，没有不可以序关系化的集合，因此我们说从深层次讲（或说从本质上讲）任何集合都存在序结构，那么说序结构是

现代数学的，从而也是整个数学的基本结构，是合理的.

二、代数结构

这里的“代数结构”对应于第二节中的“运算关系”. 运算关系中最基本的是+，·及其推广形式，而各种代数系统正好是在+，·及其推广形式基础上附加以一定的公理（比如满足一定的运算定律等）而界定出的. 反过来说，代数正是以这种方式对数学系统进行分类的. 比如群、环、域、体、模、格、线性空间等，分别都是一个代数系统，也是一个代数类. 同时稍作广义的还有同余类、同构类、同态类等也都是代数类. 特别地，这种代数关系还广泛地存在于数学各个分支中，参与数学的基本构成，所以称它为数学的又一个基本结构是合理的. 进一步的内容见第八章.

三、拓扑结构

拓扑结构是对空间的某种特性的描述，源于对欧几里得空间的邻域特征的认识. 即发现，任一个开的欧氏空间 Ω 总有这样的**开集**构成特征，使得空集（也可以是闭集）是开集、全集 Ω 是开集、Ω 中有限个开集之交是开集、无限个开集之并也是开集. 特别地，还可在 Ω 的全部子集集（幂集）2^{Ω} 中找到子集 $\tau \subset 2^{\Omega}$，使之在 τ 上满足上述四条“开集公理”. 于是问题被**公理化地抽象**，从而被推广成描述一类集合 Ω，只要 Ω 及其 $\tau \subset 2^{\Omega}$ 满足上述“开集公理”即成. 显然这样的 Ω 实为一个大类，记为 C^{H}，把它叫做拓扑类. 拓扑类 C^{H} 中每一集合 Ω（$\in C^{H}$）及其 τ 构成一个拓扑空间，记为 (Ω,τ). (Ω,τ) 就是第二章第三节之四中谈及的拓扑空间. 注意到，同一个 Ω，选择的基 τ 不同，其拓扑结构也不同.

至此可见，虽然拓扑空间的抽象定义容易使初学者“摸不着顶”，但它的确能使问题虽从欧氏空间来，却能适合于一大类（C^{H}）空间. 这再次体会到了数学抽象的意义.

那么显然，作为进一步研究的一个直接任务，则是对 C^{H} 的分类和探讨，这时涉及到一个拓扑空间变成另一个拓扑空间的变换问题或叫对应关系问题. 这个“对应关系”就是第二节中谈到的映射 $\varphi: X \to Y$. 当其映射 φ 满足“连续性”，则拓扑空间 X 映成的 Y 必为拓扑空间，这样的映射 φ 叫做**拓扑映射**. 拓扑学是研究拓扑映射下，拓扑空间的**不变量**（或叫不变性）的科学，因此拓扑学的生命力即在于拓扑映射研究或说拓扑空间之间的对应关系研究，这种研究的基础则是通常(《高等数学》中讲到的）的邻域、序列、聚点、收敛、极限、开闭集、连通性等.

当拓扑映射φ满足所谓“满射、单射且双射”关系时，φ叫做同胚映射[①]，这时称拓扑空间X与Y**同胚**，一般记为：$X \simeq Y$.

对于同胚映射φ，当φ,φ^{-1}皆“可微”时，称其为**微分同胚**，研究微分同胚下不变量的学科叫**微分拓扑学**．它形成于20世纪60年代初．

设$\varphi: X \to Y$，$\phi: X \to Y$皆连续映射，且有对x，t的二元连续映射$F_t: X\times[0,1] \to Y$，满足$F_0 = \varphi$，$F_1 = \phi$，则称φ与ϕ**同伦**．一般记为$\varphi \backsim \phi$.

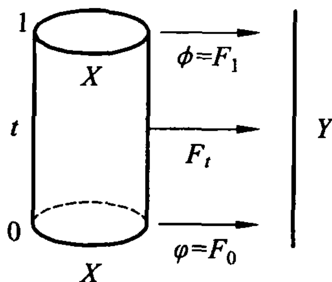


图 3.2

请参见示意图 3.2．对同伦类的研究是当今微分拓扑学的热点之一．

进一步，比如对拓扑空间还可以分为Hausdorff空间、距离空间等来讨论．前者是这样的拓扑空间Ω, $\forall x,y \in \Omega$，必存在非空邻域

$$N(x),N(y) \ni N(x)\cap N(y) = \varnothing$$

后者是这样的拓扑空间Ω，有距离映射

$$d: \Omega\times\Omega \to \mathbf{R}\ \text{（实轴）}$$

使得$\forall x,y,z \in \Omega$必满足“距离三公理”：

（1）$d(x,y) \geqslant 0$，其中“＝”$\Leftrightarrow x = y$；

（2）$d(x,y) = d(y,x)$；

（3）三角不等式：$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

特别地，还可以利用拓扑空间及其性质对多种对象作出分类研究．比如，对于n维曲面的拓扑结构研究即有著名的**庞加莱猜想**（1900年）：“对于连通3维闭流形（X^3），有$X^3 \simeq S^3$”．其中一种推广形式为“n维空间中一个具有光滑、紧致、$n-1$维连通的n维流形，必同胚于S^n（n维球面）”．由此形成了拓扑学的一个热门方向，从而促进了专门研究流形上“微分结构”的微分拓扑学的发展．“微分结构”系拓扑结构的一个下属术语．

（注：庞加莱猜想终于在2002至2003年被俄罗斯数学家佩雷尔曼以连续在网上发布的三篇论文，并被包括我国学者朱喜平、王怀东、田刚及三位西方学者的多篇论文分别证实其正确性后，被承认，从而得到解决，为此他获得2006年的数学菲尔兹奖（但他拒绝领此奖）．）

---

① 当φ满足线性映射（$\varphi(ax_1+bx_2) = a\varphi(x_1)+b\varphi(x_2), a,b \in R, x_1,x_2 \in X$），则叫做同构映射；当$\varphi$为线性“满、单”但不满足双射时叫做同态映射．顺便说说，同态、同构乃至同胚概念在数学中已被移植、引申到很多分支领域．

总之可看到，对于拓扑空间意义下的集合，也有着丰富的研究类型和研究内容，并且由于公理化的拓扑空间概念之广泛性，拓扑学的种种概念也与代数学概念一样，遍及数学的各个角落，因而成为整个数学的又一基本结构.

四、复合结构

必须强调，虽说数学的“基本”结构是序、代数和拓扑三大结构，但可以说具体到哪一个数学分支都不可能以纯粹的某一结构来“构”成. 正如说一幢楼房的基本结构是钢筋结构、水泥结构或砖石结构，但不可能某幢楼仅由钢筋或仅由水泥抑或仅由砖石构成，必须是其复合体，即使其任一部分(子建筑)也是如此. 只是视其建筑的不同，三者的复合比例、复合方式不必相同而已. 的确，即使说距离空间，似乎“纯粹”是个拓扑结构. 其实也少不了序关系和加（代数）运算. 具体说比如：

（1）**距离线性空间**. 它是同时满足距离空间和线性空间定义（具有两种基本结构）且两者间无矛盾（即相容）的空间，其上有着更为丰富的数学规律. 比如作为泛函分析学中重要研究领域的，也是现代应用十分广泛的“赋范空间”及其完备化的 Banach 空间；“内积空间”及其完备化的希尔伯特空间等，都是距离线性空间的特殊情形（即在距离线性空间上再加公理限制而成的情形）.

（2）**代数拓扑**. 这是组合拓扑学的主流分支，也是代数结构与拓扑结构的复合结构. 这是因为在庞加莱对多面体实行**单纯形**（n 维空间中 $n+1$ 个不共面点连成的凸形）剖分而成的所谓“复形”（“野蜂窝”形）上寻找拓扑不变性时，产生了**同调论**，而同调论用代数方法研究“复形”又产生了**同调代数**，用同调代数方法研究“复形”则产生了代数拓扑. 所以代数拓扑是代数结构与拓扑结构的复合结构.

(3) 容易看出，现代数学中哪一个分支都离不开全面的基础，都是多个基础学科的综合. 这本身就说明了数学中广泛的复合结构特征.

(4) 特别地，如今“结构”一词在数学中也已广泛运用，诸如数学结构、逻辑结构、空间结构、测度结构、微分结构、函数结构、调和结构等，显然它们要么仅仅是“结构”一词的推广，要么属上述三大基本结构的下属概念或复合概念、引申概念. 总之上述三大结构才是基本结构.

最后可以问，在理解上述思想基础上，可否进一步抽象地认为，数学，根本的就是一个（映射关系下的）“映射”结构呢？这也是可以的. 因为在“映射”意义下可说，以上三种结构都是它的特例. 比如，当映射特殊化为对拓扑空间的连续映射时即对应于拓扑结构；当映射特殊化为多个对象间的代数运算时即对应着代数结构；当映射特殊化为量化映射时则成为序结构.

第五节 无穷的数学认识

无穷，在自然科学（也包括高等数学）中认为它是不存在的，姑且这样说吧，但我们仍然认为一个科学工作者不能没有对“无穷”的思维修养．这也是作者的一点体会．

的确，比如据说数学的定义（描述性）有两百多个，其中一个说“数学是研究无穷的科学（希尔伯特）”即揭示出数学的又一大特征．数学对无穷的研究无论从其历史深度、广度和抽象度来讲，都是其他任何学科所不及的．同时后面将越来越多地看到，许多深刻的数学成果都是在无穷概念（比如无穷级数）下得到的．

本节仅对无穷作一次初步的一般认识，鉴于数学中无穷概念之重要，涉及无穷的内容之多和数学修养中“无穷思维”之不可少，我们在第十一章专门认识“无穷小世界”时，还将对无穷小概念作系统认识．

一、无穷的基本类型

无穷又叫无限，基本上有**无穷大**、**无穷小**和**无穷多**三大类型，其中最基本的还是前两者．一般记无穷大为∞，则无穷小即为$\frac{1}{\infty}$；若记无穷小为o，则无穷大即为$\frac{1}{o}$（不过得注意这时字母o不是0，因为无穷小只是极限为0的**变量**而不是0）．称无穷大与无穷小之间的关系为反演关系．据此，知道了其中任一个的性质即可了解另一个的性质而不必重复．

数学中为表述“无穷大”的性质，提出了一个“任意大”术语．任意大总是有限的，所以任意大不是无穷大，它们之间有本质差异．

一个集合X为无穷大是说在X中任意指出一个任意大的集合X'，都可以在X中找出一个这样的集合$X''\subset X$，$\ni X'\subset X''$．显然这里集合X可以是高维空间，可以是一维数轴，也可以是一维时间（正实轴或叫半数轴），也可以是0维点集（无穷多元）．

关于“无穷大”的公理化概念，一般是经极限定义推出无穷小，再反演而成（见任一本《高等数学》），这里免述．

出于直观理解，在欧氏空间意义下的数学中认为无穷大是不存在的、发散的，但在个别（非欧）情形为着形式化分析的需要，可以把无穷大作为一个数或一个几何点（无穷远点、无穷远边界）来处理．比如拓扑空间中“加点紧化”处理，

动力系统在相空间作全局分析时的“无穷远奇点”和“无穷远边界”等处理手段，就是如此．这在“射影几何”中即可得到证明，它是合理的（进一步的内容，见第六章第二节、五和第十章第三节）．

一般说，用有限形式来表述无穷，最基本的方式是**周期**．比如，一般周期的定义域皆无穷空间．不过，比如无穷序列只有它的序号才有周期，而“无穷序列”也仅当其“序列通项”（作为序号的函数看）具有规律时（能用公式写出来时）才是可认识的．

至于“无穷多”，实则无穷多元的集合情形．关于无穷多元集的研究有两大类型：一类是无穷多元间的组合关系研究；另一类是无穷集合的结构认识．

关于**无穷组合**，比如数论即属“整数”这个无穷集合的无穷组合形式认识．此外，组合论、组合拓扑自然也是对无穷组合集（组合空间）的认识问题．特别地，如今对（将谈到的）混沌的认识和计算复杂性研究等皆属这类无穷组合形式的认识．对无穷组合的认识也已成为数学的一个方面的内容，自然也有必要加强这方面的思维修养．

至于**无穷集**的结构认识，典型的则是以认识实数结构为背景的**一般集合论**和**公理集合论**（参见第六章）．

二、科技发展—— 向无穷的迈进

这里将说明，对“无穷”这个纯粹抽象的“不存在的”对象之研究并非无意义．不妨说，人类共同奋斗的方向正向着它迈进呢，因此作为人类理性认识的前沿科学之一，数学不能不研究无穷，惟恐不能深入．

事实上，生命凭着它的周期可以无穷下去，时间、天体都在凭着它的周期无限下去，原则上机器也在凭借周期无限运转，汽车也在凭借周期无限前进……生活中周期运动太多了，它们都直接联系着无穷概念．再看人类的奋斗，比如人类对空间的探索正在迅速扩张，其“视野”已达 120 亿光年，印迹已达火星．又如人类的空中客车、远洋油轮等运载工具以及摩天楼、大跨桥等建筑设施则越来越高、越来越大．另一方面，人类在微细工程技术上已进入纳米级，在实验技术上已达到基本粒子，达 10^{-15} m，在时间分辨上达 10^{-22} s．再加上人类的高精尖工程，如航天器和微电子设备上的复杂性程度，简直可以说人类正在向无穷（大、小）迈进，尽管它与真正的“无穷”还有着本质的差距（差距仍为 ∞）．所以，若能从理性上较好地认识无穷，必然对科技事业大有裨益，甚至说这就是科技理论的需要．何况人类为获得有限理论成果，也需要无穷概念和无穷知识呢．比如没有无穷概念就没有微积分方法，就没有傅里叶分析以及如今的小波分析等．

三、无穷认识小史简述

(1) 不难看出，当初毕达哥拉斯的有理数错误就出自对无穷小的起码认识不足．尽管人们很快就看到了这点，但仍然无法认识无穷小，因此产生了**穷竭法**以回避无穷小．事实上，当时产生的**公理化**方法，从思想源流来看仍属“穷竭法”思想．当然，穷竭法并不错，至今仍不失为数学中的一种证明方法，只是它的运用“场合”极为有限，更不能把整个数学都建立在穷竭法上．若这样就比直觉主义思想还要狭窄了．

(2) 几乎在穷竭法产生的同时，哲学上也产生了**芝诺悖论**(见第二章第一节)，这仍然是对无穷小认识不足引起的谬论．其实“穷竭法”不能不说是在有理数错误和芝诺悖论两件大事的共同作用下形成的．的确，“穷竭法”在当时不仅作为数学方法流行于数学中，也作为一种思维方法流行于哲学界．

(3) 17 世纪**微积分的诞生**使得数学实在不能回避无穷小了，这时芝诺悖论重又被提了出来．此后，数学和哲学与其说是为着微积分的生存而整整争论了两百年，倒不如说是为着对“无穷小”的认识而争论了两百年．是极限论的“诞生”斩断了这个旷日持久的争辩，使微积分学获得了“解放”，获得了“新生”．

(4) 在十八十九世纪，微积分方法迅速发展，**无穷序列、无穷级数**（如泰勒级数和傅里叶级数）理论的发展就是人类对“无穷”认识的一次进展，具体说是对有序无穷集的一种认识．比如，欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 的证明即少不了“无穷”(具体即无穷级数)．特别是在 19 世纪后半叶，魏尔斯特拉斯（Weierstrass）运用无穷级数构造出有名的“点点连续却点点不可导”奇例后，开启了数学中“病态数学”的研究，加强了分析学的严格特征，对数学贡献之大使得魏氏因此被誉为数学分析之父．

数学对无穷认识的继续发展见下述．

四、现代数学对无穷的认识状态简述

1．对无穷小空间结构的认识

历史上(“三”中)对无穷小认识的基本过程可以说就是对“无穷小空间”(空间作无穷小细分)的认识过程．继续这一认识，可有：

(1) 19 世纪后半叶产生的**极限论**，对无穷小空间作了序列点式地“逼近”，因而揭示了无穷小空间的一个很好的极限性质．以此为基础可以很好地建立起微积分学，以致当时人们似乎认为对无穷小（亦即无穷小空间）的结构认识已经明白，即使当时微积分的反对派也这样认为，要不他们怎么会偃旗息鼓、善罢甘休

了呢？

（2）20 世纪 30 年代物理学中产生了**量子理论**，它用实验学和统计学方法揭示出量子世界具有与直观（中观）世界完全不同的性质，如测不准原理、不满足牛顿力学定律等，并把量子世界叫做“不可尺度空间”．实际上这就是物理学对无穷小空间的一种逼近性认识．尽管它较之数学意义下的无穷小还差之甚远，却不能不说它们揭示出的不可尺度空间性质也应该是数学很好的参照和启发．

（3）20 世纪 60 年代在数学内，具体说是数理哲学内“模型论”学派产生了**非标准分析**新分支（鲁滨逊，1961 年）．这实际上是克服了极限论认识无穷小的局限性之举，是人类对无穷小认识的又一次深化．但是否可说，至此人类已认清了无穷小呢？进一步的叙述见第十一章．

2．对无穷多元的有界集认识

本节第一段已谈到，对“无穷多元集”的认识有两类：一类是无穷组合；另一类则是公理集合论（认识无穷集结构）．前者旨在对一个有界集上的无穷多元素，解决其组合关系的认识问题；后者是借公理集合论使得人类对无穷多（本质上也是无穷大）的概念和结构认识得到大大的突破．具体说是：

（1）康托尔提出了“可数无穷集”概念，他用一个“一一对应”的映射概念来表明诸如自然数、整数、有理数，直至有限维空间的有理数等，都是“可数”无穷集．所谓“可数”即可以人为地给集合中元素无穷地“编号”（比如数（shǔ）数的顺序即是个编号过程），而不会有逻辑上的遗漏．

显然这样的**可数**无穷集是一大类，比如除上述几种外，康托尔还证明，所有实代数数集（一切有理系数多项式之实根集）也是可数集．

（2）康托尔还运用（1）中“一一对应”映射方法证明了一般无穷集（包括下面(3)中)的一个重要性质：所有无穷集(U)皆存在自己的同维真子集($u \subset U$)，使得 u 与 U 之间具有“一一对应”关系．比如，一切有理数集皆与其真子集“自然数集”一一对应；整个实轴可按映射 $f = \dfrac{x}{(\varepsilon - x)(\varepsilon + x)}$ 与其子区间 $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ 一一对应，$x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$，$\varepsilon$ 为任一小正实数，如此等等．

（3）康托尔证明了存在不可数的实数集．比如，他凭思辨认识说，任一实轴段上的“实数集”减去其上的所有“代数数集”后的“余集（亦即超越数集）”是不可数的．由于当时才证明存在超越数，还谈不上不可数性，他这一“冒险结论”引起了反对者，诸如克罗内克（Kronecker，代数学家）、庞加莱、布劳威尔等更强烈地攻击．后来才知道康托尔的确正确．

（4）康托尔提出了“势”（即基数）概念，并且在其“势”概念下，把无穷

大作了分类，由此揭示出无穷大有着内在的层次级别结构（见第六章第一节、五）. 这里说明，极限论中讲到的无穷的“阶”只是在极限意义下的相对概念，是外在性质，它与“势”概念下的层次级别具有本质差异. 比如，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0$，虽说 x^2 是比 $3x$ 更高阶的无穷小，但实际上两个无穷小集合的“内在结构”是一样的，只是在极限意义下趋于 0 的速度不同而已. 这点在图 3.3 中，随 $x\to 0$ 从相应函数值点沿曲线和沿直线的不同下降速度即可看出.

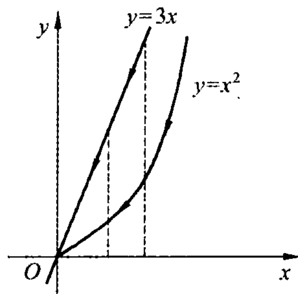


图 3.3

最后不能不说，虽然康托尔创立的集合论使得人类对“无穷多元集合”的结构得到了深刻的、突破性的认识，但离康托尔的初衷目标相差还远. 比如，康托尔的连续统猜测就至今未能得到判定，甚至问题还更加复杂化了（进一步的内容见第六章第一节、五）.

第六节　数学中的“形”思维与“形”演算

一、小　序

著名数学家阿洛尔德说过，绝大多数数学家是“几何思维”. 而几何是研究空间图形的科学，所以也可说绝大多数数学家是“空间思维”或“图形思维”.

又，已知数学是“数”与“形”结合的科学，这里“形”正对应着空间、几何、示意图（不同于制图学的图），所以在数学中，出自“数”（包括各层次的数）的学科研究，不可忽视其“形”的实质和“形”的思维. 反之，出自“形”的学科（几何类学科，半边天）研究，不可忽视其“数”的实质和“数”的运算. 本节旨在说明后者.

首先说，数学中的空间一般是 n 维（欧氏）空间，那么怎么作图呢？能不能作图呢？回答是“不为也，非不能也”. 原则上，任意维坐标系下的空间图都是可以作出的，只是维数愈高作图愈难罢了（见拙著《数学思想赏析》）. 更重要的是，图形在 $n>3$ 时已失去了直观感（实则直观经验），所以即使画出来也失去了作图的“直观”意义了.

但是，思维上不可放弃高维空间思维，也应该视其为数学修养之一，思维的多了即会变得逐步“清晰”起来.

不过，在数学行文中，常常是用低维图来表示（示意），其“思维”和“语言”都是从低维情形推广出去的．比如，把 n 维空间中 $n-i$（$0<i<n-2$，i 为自然数）维子空间叫做“超曲面”；把两个超曲面的交叫做“超曲线”等．

其次说，由于函数只有几个基本类型，因此几何图形也只有几个基本类型．特别在应用中，**计量模型**（或叫统计模型）常常是线性的，容易掌握．对于（通过思辨分析建模的）**数理模型**，虽然形式复杂一点，但常常只是低维的且只有几种简单类型．

特别地，一维曲线及相应问题思考是通常接触或涉及最多的情形．比如，虽然常常遇到的“一般系统”实质上都是高维空间的，但将看到（第九章第二节四）从其高维空间来看它的运动规律时，仍然是一条（坐落在高维空间的一维）曲线．所以作为“数理曲线”对一维曲线特征及其“运算”的熟悉是十分有益的．

据此，下面首先列出几种基本初等函数及其图形，然后给出几种基本演算类型，最后简单举出几个图例．

二、几个基本图形类型

（1）幂函数型：

$$y=x^n,\quad n\in 整数$$

一般的有

$$y=(x-a)^n,\quad n\in 自然数$$

见图 3.4①．

（2）指数函数型：

$$y=a^x,\quad x>0$$

一般的有

$$y=ae^{bx},\quad x>0$$

见图 3.4②．

（3）对数函数型：

$$y=\log_a x,\quad x>0$$

一般的有

$$y=k\ln(x+1),\quad k>0$$

见图 3.4③．

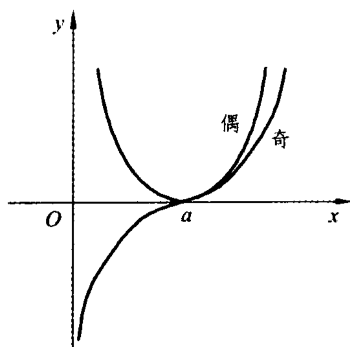


图 3.4①

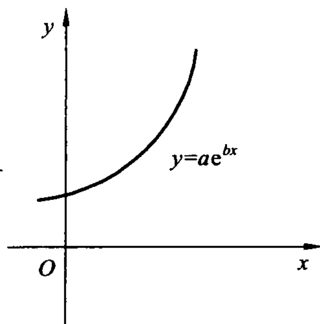


图 3.4②

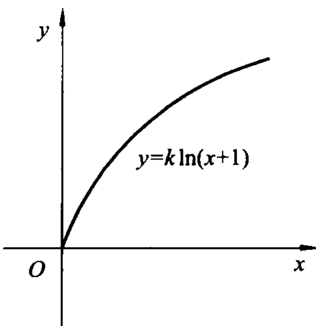


图 3.4③

(4) 三角函数型：比如 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 等的基本图形，这里不必赘记.

以上的函数叫做“基本初等函数”，以下列出几类“初等函数”——基本初等函数经有限次初等运算而成的函数.

(5) 符号函数型：这是一“类”函数，一般是“分段”函数型（不过，原则上分段函数皆可表做“统一”形式，只是要复杂一些罢了），这里仅举四例，且仅给出例四的图示.

例 3 取整（或叫阶梯）函数：

$$[x]=i,\quad i\leqslant x<i+1,\quad i\in\text{整数集}$$

图略.

例 4 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x=a\\ -1, & x<a\end{cases}$$

图略.

例 5 绝对值函数

$$|x-a|=\sqrt{(x-a)^2}=\begin{cases}x-a, & x\geqslant a\\ a-x, & x<a\end{cases}$$

图略.

例 6 一种组合形式

$$f(x)=\begin{cases} x, & |x|>1 \\ 0, & |x|=1 \\ -x, & |x|<1 \end{cases}$$

其统一形式为

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^{2n}-1)x}{1+x^{2n}}$$

或有

$$f(x)=x\operatorname{sgn}(|x|-1)$$

见图 3.4⑤.

（6）双曲型（或叫反演式）. 例:

$$f(x)=\frac{1}{x+a}$$

或例:

$$f(x)=1-\frac{1}{x+a}$$

后者见图 3.4⑥.

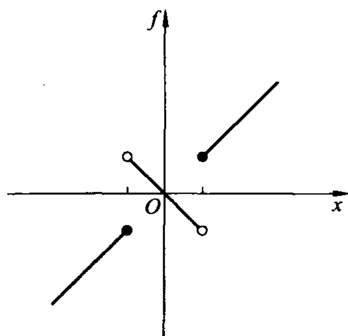


图 3.4⑤

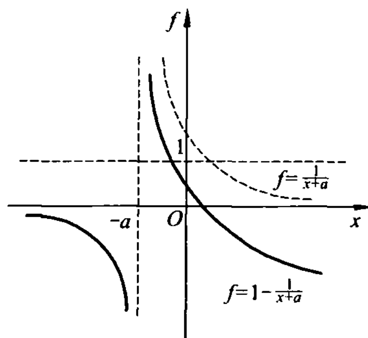


图 3.4⑥

（7）Logistic 曲线: 它代表了认识客观事物的一大类十分重要的思想，它来自一类十分基本的“动力系统”（概念见第九章第三节）. 这里给出的是个初值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}=ax(b-x) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

其解为

$$x=\frac{b}{1+\left(\frac{b}{x_0}-1\right)e^{-abt}}$$

如图 3.4⑦，适当选取初值 x_0 即可得到该曲线．特别须知，曲线⑦（简称 L-曲线）代表着一切事物“生、兴、盛”的发展过程（统计规律），彼此间仅是系数 a,b 的差异．显然，这应该作为我们认识客观事物的一个重要思想．特别地，该动力系统 $\dot{x}=ax(b-x)$ 的离散形式叫“离散动力系统”：

$$x_{n+1}=ax_n(b-x_n)$$

也是现代动力系统中一个十分基本的模型，它既简单又能产生诸如混沌之类多种“复杂性”现象（参见第九章）．

（8）高斯（Gauss）曲线：这是今天已较普及的“数理统计学”的一条基本曲线（又叫正态分布曲线），相应的基本形式为

$$f(x)=ae^{\frac{-x^2}{\sigma^2}}$$

见图 3.4⑧．

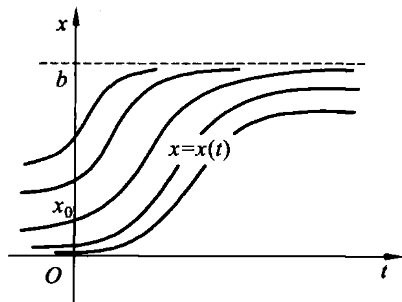


图 3.4⑦

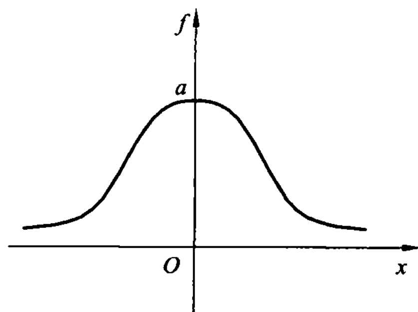


图 3.4⑧

（9）钟罩型：

$$\begin{cases}f(x)=1-\varphi_\varepsilon(|x|-r)\\ \varphi_\varepsilon(|x|-r)=\lambda(|x|-r)[\lambda(|x|-r)+\lambda(\varepsilon-|x|+r)]^{-1}\\ \lambda(|x|-r)=e^{-(|x|-r)^2}\delta(|x|-r)\\ \delta(|x|-r)=\begin{cases}0,|x|\leqslant r,\\ 1,|x|>r.\end{cases}\end{cases}$$

又可表作:

$$f(x)=\varepsilon+a\mathrm{e}^{\frac{-(x-x_0)^2}{\sigma(x,x_0)}}$$

$$\sigma(x,x_0)=\begin{cases}(x-x_0)^2, & |x-x_0|\leqslant r\\(x-x_0)^4, & |x-x_0|>r\end{cases}$$

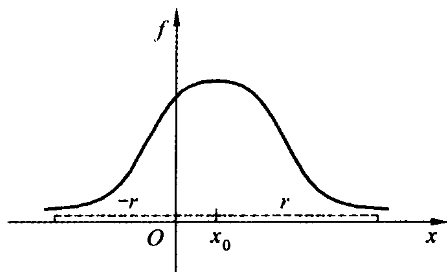


图 3.4⑨

见图 3.4⑨. 钟罩曲线又叫冲击函数曲线, 是一种包括“生、兴、盛、衰、灭”的“生命曲线”. 其实曲线⑧、⑨皆可由⑦型 L-曲线 (及其对偶曲线 $(1-x)$) 来构成.

(10) 圆锥曲线: 设有三维空间 (x,y,z), 其直角坐标系按右手法则确定. 再设以 z 为竖轴的圆锥曲面, 锥顶在原点, 锥顶角为定数 2α, 则有

$$\cos\alpha=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

或即

$$(1-\cos^2\alpha)\cdot z^2=\cos^2\alpha\cdot x^2+\cos^2\alpha\cdot y^2$$

考虑到对 z 轴的轴对称性, 只需就如图 3.5 (a) 中纵剖面来讨论, 这时设有 (x,z) 平面上过锥线上定点 (x_0,z_0) 的直线 h, 则有

$$h:z=(z_0+\tan\theta\cdot x_0)-\tan\theta\cdot x\,,\quad \theta\in[0,\pi/2]$$

h 再配以 $y=y$ 就是该三维空间中一个平行于 y 轴的平面. 那么如下方程组:

$$\begin{cases}(1-\cos^2\alpha)\cdot z^2=\cos^2\alpha\cdot x^2+\cos^2\alpha\cdot y^2\\z=(z_0+\tan\theta\cdot x_0)-\tan\theta\cdot x, \quad \theta\in[0,\pi/2]\end{cases}$$

则成为所有圆锥曲线的统一表达式. 比如, 将后式的 z (或 x) 代入前式即得投影到 (x,y) 平面 (或 (y,z) 平面) 的圆、椭圆、抛物线 (或抛物线、双曲线).

特别地, 数学中常常 (射影几何地) 视平面的无穷远为一点, 正对应于视地球北极为“原点”时, 南极即成为它的“无穷远点”. 这样一般“二维空间”即可成为有界无边的“紧致”空间, 叫做“加点紧致”. 那么, 在“加点紧致空间”意义下可见圆锥曲线——圆、椭圆、抛物线、双曲线——皆封闭曲线. 关于无穷远点, 参见图 3.5 (b).

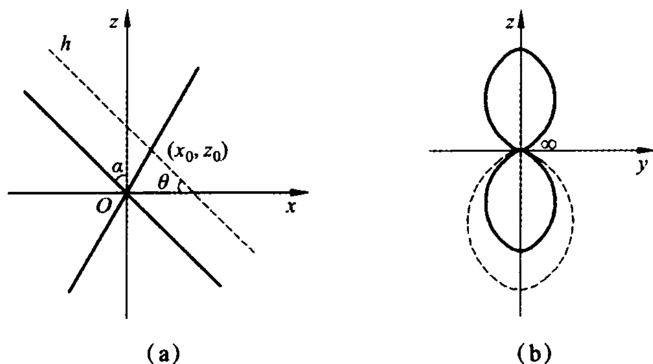


图 3.5

三、图上运算：分解作图法

应用中建立的数学模型，除计量模型外常常是些低维的模型，其图形很直观，因此习惯于图形上的思考和运作是有好处的．这时，少不了要来一些图上的“运算”．由于只是低维的，在上述几种图形基础上只需再掌握以下几条即可：

(1) 首先注意到，作为“示意图”，只需知道（坐标系中）几个特殊点（一般是0,1和∞点，抑或再根据具体函数特征观察几个特殊点）的“坐标”，再凭借函数的“连续、光滑”性即可作出“示意图”来了．

(2) 掌握 x^2, x^3 的图形及其反演式的图形（比如 $y=x$ 的反演式 $y=\frac{1}{x}$ 即是第一项限的一支双曲线）．

(3) 注意到在反演式意义下，分式也是乘积式，即 $\frac{q(x)}{p(x)}=q(x)\frac{1}{p(x)}$ ．

(4) 回忆一下高等数学中用微分法判定一元函数的零点、极值点、单增、单降、凹性、凸性及渐近线等知识．

(5) 所谓“图形运算”，只须加、减、乘即可．具体说是对上述诸基本图形作一些加、减、乘运算即可．现举例如下：

例 7 分解作图法，试作出图 $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ ．

解 解题步骤为：

第一步，作 $y_1=\frac{1}{x-1}$；

第二步，作 $y_2=y_1^2$；

第三步，作 $y_3=x^3$；

第四步，作出函数 $y=y(x)$ 的渐近线： $y_4=x+2$；

第五步，作 $y_5=y=y_2y_3$，得出答案图，即图 3.6 中实曲线.

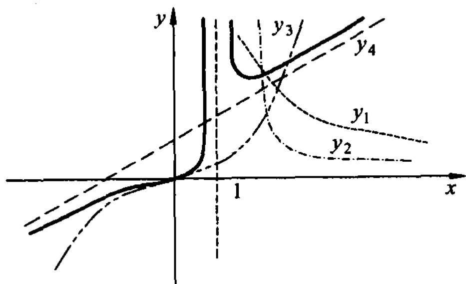


图 3.6

例 8 判定如下积分式的正负性：

$$A(h)=\int_0^{\arccos(h-1)}\sqrt{1-(h-\cos x)^2}\,(h-\cos x)\mathrm{d}x,\quad 1<h<2$$

（注：这是关于"环面上微分系统"中遇到的问题，是个十分精细的不等式判定问题，即使（比如当年）令 $h=h_0=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，用计算机也未能辨识成功，最后是用"作图法"解决的．这里给出主要思路如下）

解 具体步骤为：

首先作出 $y_1(x)=h-\cos x$ 的示意图；

然后作出 $y_2(x)=y_2(y_1(x))=\sqrt{1-y_1^2}$ 的示意图；

再作出 $y_3(x)=y_3(y_2(y_1(x)))=y_2\cdot y_1$ 的示意图，则上述积分式成为

$$A(h)=A(h_0)=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}y_2y_1\mathrm{d}x$$

这时，主要是需要用既有的初等手段来作图．比如，求出各曲线的特殊点，描述各曲线特征及曲线间关系，并注意到积分 $A(h_0)$ 是一个"代数"面积，为寻求面积，需要作一些切割、分段等"繁而不难"的工作，最后得到 $A(h_0)<0$，这里免于赘记，有兴趣者可参见四川大学学报 1982（2）.

例 9 实质性隐函数作图.

设有隐函数 $f(x,y)=0$ 不能表成显函数（不能就某个变量解出来），也不能作因式分解，试作出图来观察.

解 第一步，判定特殊点，比如求 $f(0,0)=0$，$f(0,y)=0$，$f(x,0)=0$ 等点的坐标位置.

第二步，将 $y=kx$ 代入式，求解 $x=x(k)$，并对 k 进行讨论，即可作出示意图.

例如，某次研究中需要知道隐函数

$$x^2y^2-x^3y+y^2-3xy+x^2=0$$

的图形，我们的做法（步骤）是：

（1）判知曲线过点（0,0）；

（2）判知曲线与两轴无交点；

（3）代以 $y=k(x)$ 得到

$$k^2x^4-kx^4+k^2x^2-3kx^2+x^2=x^2[k(k-1)x^2+(k^2-3k+1)]=0$$

所以有解

$$x_{1,2}=0\,,\qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{\left(k-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{k(1-k)}}$$

可见 $k=0,\ k=1$（即 $y=0,\ y=x$）是无穷渐近线. 从而可知曲线在

$$0<k<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\triangleq k_1 \quad 和 \quad 1<k<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\triangleq k_2$$

两"锥域"中有两支分别以直线 $k=0$ 和 $k=1$ 为渐近线的曲线，得到图 3.7 中实曲线.

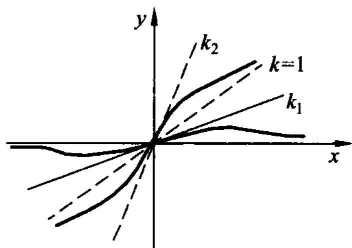


图 3.7

四、数学"变换"的"形"特征

的确，数学就是个演算、推演、演化的过程，是在"亚马逊河"式的逻辑密网中，自已知的此端探寻其未知而迷茫的彼端. 这时，技巧和创新是少不了的（前人的技巧、创新在后人就是既成方法），归结起来就是"变换"，或叫"映射".

那么，数学在"数"上的"变"（变换）对应到"形"上又如何呢？的确，数学变换是有其鲜明几何特征的. 一旦意识到这点，往这方面思考了，即使未完全想通也是远好于不去想的. 比如，《线性代数学》中虽然都是高维问题，但也只是线性的（是线性空间的线性关系），因此应该是直观的. 一般教科书之所以未从

图形上作解释，原因之一也在于它是“直观”的．然而学生们却忽略了从空间意义上去理解，结果是仅记住了一堆堆公式，容易忘却．

具体比如，大家都记得非齐次线性方程组：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其解集合不是线性空间，然而相应的齐次线性方程组（$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$时）的解集合则是线性空间．这是用线性空间定义中公理条件去判定的，正确．但若能作出“图形”示意，自然会变得形象、深刻（参见拙著《数学思想赏析》）．

一般地，数学变换，即使从“数”（函数）角度说，其类型也是多的，诸如函数变换、积分变换、拉普拉斯变换、傅里叶变换、折积变换等．

从“形”（空间）角度说，总的就是个空间变换，具体归为两大类型：

（1）一个是“空间的转换”，目的是使其“形”变得简化以便直观．比如，对于一个空间中的非线性对象，若能找到一个变换技巧把它“变”（或叫转换、对应、映射）到某个新的空间，成为线性对象，这时问题即变得简单了．若能解决则在解决之后，再（在表达式上）“沿路”逆转，回到原空间去，即得到所需答案了．这一变换思想在《高等数学》的“定积分”诸法中，也是个基本手段．有时甚至存在这样的情形，当把（简单的）积分变元变成某种（复杂的）函数代进去时，反而能使函数整体变得简单．

（2）另一个是“空间层次的转换”．比如一个（多重）复合函数

$$W=W[t]=W(V(U(X(t)))\triangleq W\circ V\circ U\circ X(t),\quad t\in(0,T)$$

若直接讨论较难，因此可将其看做一个“多层”函数

$$W=W(V),\quad V=V(U),\quad U=U(X),\quad X=X(t)$$

再作逐层讨论，这时对于每一层往往变得简单．总体上也就是步骤多一点、繁一点，但难度减小了．这也是一种“多层空间”问题为直观而作出的简化转换，在积分学中亦常用到．例如，一个生产企业 Z，它是其车间 Y 的函数，车间又是其原材料 X 的函数，于是有

$$Z=Z[X]=Z(Y(X))\triangleq Z\circ Y(X)$$

即可作分层次的讨论．

第四章　从“对偶空间”到“二象论”

本章旨在从数学中一个基本概念“对偶空间”的讨论出发，逐步引入并简介系统学的一个“二象论”分支学科．这是因为，树立“二象观”对于理解下面各章将更为得力，所以必须把“二象”概念介绍尽量提前．

但是要用“二象观”来全面理解数学的内容——“数学的二象机制揭示”，并作为一章，则宜于放到最后去．因为需要尽量放到大家对数学各方面有个较为全面的了解之后才利于归纳，所以我们不得不分开来叙述，把概念部分放到本章，把全面揭示数学“二象”实质的内容放到后面（倒数第二章）．

本章分为四节，前三节分别表出了数学、物理和哲学对客观世界“对偶”结构的认识；最后殊途同归，统一到“完全空间”理论上来，也为（作为本章核心内容的）第四节正式从“系统学”角度引入“二象系统”概念作好铺垫．

学习本章后将体会到，树立“二象观”是为理解数学增添的一副翅膀．

第一节　对偶空间认识

比如，对于典型的数学模型（系统）：

$$y=f(x,A)$$

人们常常对自变量 x 和因变量 y 的变域以及函数 f 的结构较为重视，而对于参变量 A 及其变域重视不够，尤其对它的实质认识较少．本节在讲解数学的“对偶空间”基础上最终将回答系统中 A 的本质，现从基本问题谈起．

一、具有内积特征的对偶空间概念及其推广认识

1．线性空间的对偶概念

首先说**向量空间**．向量空间就是通常的几何空间．欧几里得空间是其常见形式，它的元素是向量，又称矢量，最大特征是其分量仅代表数量．那么，**线性空**

间则是向量空间的推广，最大特征是其元素（有时也称向量）的分量不一定代表数量，只要它满足（实则赋予它）线性空间公理化定义中的公理即可．通常仅在强调其数量性时才用向量空间称呼．

对于实域或复域上的线性空间 V，若有 V^* 且与之满足如下"内积运算"关系（记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$），则称 V^* 是 V 的对偶空间．

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$；$\boldsymbol{\alpha}^*,\boldsymbol{\beta}^*\in V^*$；$a,b\in\mathbf{R}$（或复域 $\mathbf{C}$），满足内积关系：

(i)
$$\left\langle \boldsymbol{\alpha}, a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}^*\right\rangle = a\left\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^*\right\rangle + b\left\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^*\right\rangle$$

或

$$\left\langle a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}^*\right\rangle = a\left\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^*\right\rangle + b\left\langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}^*\right\rangle \tag{4.1}$$

(ii) 对一个 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\forall\boldsymbol{\alpha}^*\in V^*$，若总有

$$\left\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^*\right\rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

或对一个 $\boldsymbol{\alpha}^*\in V^*$，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，若总有

$$\left\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}^*\right\rangle = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}^*=\mathbf{0}$$

条件（i）表明 V 与 V^* 之间具有**双线性**关系，条件（ii）表明 V 与 V^* 间无正交关系，且 V，V^* 共原点（零向量）．

显然，这时互相对偶的两个有限维线性空间，具有相同的维数．

2．线性空间的对偶例

例 1　线性变换式中的对偶关系．

设有实域或复域上线性空间 X 到 Y 的线性变换式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

或记为向量式（当然矩阵也是一种向量，这里只是一种说法，以区别于式（4.2））

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)^{\mathrm{T}}$．这里若 $\boldsymbol{A}$ 满秩，则式（4.2）为一个**对偶变换**，$\boldsymbol{A}$ 叫做对偶算子．因为当 $\boldsymbol{A}$ 降秩时，严格说仅为一个投影变换，这时变成的 Y 空间已降维，它与 X 空间不满足式（4.1）的内积运算．

事实上不难检验，当式（4.2）中 $\boldsymbol{A}$ 满秩时，$\boldsymbol{A}$ 或 $\forall A_i\in\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 皆满足式（4.1）

的条件．原来这时 X 空间的变换“算子” $\boldsymbol{A}$ 就是 X 的对偶空间 Y 的基底．也就是说 Y 是由 $\boldsymbol{A}$ 决定的，因此也说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 是对偶的．显然，若 $\boldsymbol{A}$ 不同，这种变换也不同．因此从这一意义讲，对于同一个 X 空间，可有无穷多个对偶空间．

此外，易知转置阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对偶算子，因而由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 决定的空间（Z）也是 Y 的对偶空间．这时它具有“对偶空间的对偶空间为原空间”这一性质，但一般情形下不一定如此．

例 2　在例 1 中，取 $n=2$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a,b\mathrm{i} \\ c,d\mathrm{i} \end{bmatrix}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\boldsymbol{A}$ 满秩，则有

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

当 X 空间为实空间时，即得到了复空间，由此可见，实平面也与复空间（这时不把它叫做复平面）具有对偶关系．

特别地，进一步取 $n=1$，$A=\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$x\in\mathbf{R}$，则有

$$y=Ax=\mathrm{i}x$$

这时对偶双方共同形成复平面 (x,y)．这说明在复平面中，x 轴（实空间）与 y 轴（虚空间）是对偶关系．

例 3　因此，对一般的线性多项式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$$

（将知道，本质上也是一个泛函值），我们立即意识到其中参变数（系数）所在空间是其自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 所在空间 X 的对偶空间，或说线性多项式的系数空间是其自变量空间的对偶空间．

3．希尔伯特空间的对偶空间

希尔伯特空间（H-空间）是完备的内积空间（具体概念见第十章第三节、五），它可由线性空间推广而来．实际上，如果把线性空间的维数推广到 ∞，并把 ∞ 维线性多项式 $\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i$ 推广为一个更广空间 $\boldsymbol{\Omega}$ 内的“内积”关系，亦即记

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i \triangleq \langle \boldsymbol{A},\boldsymbol{x}\rangle, \forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega}$$

则 $\boldsymbol{\Omega}$ 为一个 H-空间．

因此容易推广线性空间的对偶概念而建立一般内积空间及 H-空间的对偶空间概念．比如，对于一个 H-空间 H，若空间 H' 与 H 之间满足内积关系式（4.1），则说 H' 是 H 的对偶空间．

易知，H-空间的对偶空间也是 H-空间．

此外，如果我们把一般多项式的系数空间广义地视为它的自变量空间的对偶空间，这样可使我们对代数多项式的实质会有一个更深的理解．比如，我们可在这一思想下来欣赏突变理论．

4．突变论欣赏例

突变论是法国数学家、奇点理论专家、微分拓扑学中“配边理论”之父、菲尔兹奖得主多蒙（Thom）于 1972 年创立的，一经问世便产生了轰动效应，被新闻媒介“炒”得火热，说它能预测灾变，能与牛-莱微积分媲美等，因此也曾经引起了一些非议．不过，比如在数、理、化、生及气象、社会等各方面，它的确有着广泛的应用．其数学理论也十分严谨，但是目前发展有所减缓，有必要在应用性（亦即推广性）上作出努力，使之“活跃”起来．

现仅从对偶空间观点出发，通过突变论中一个典型例子的讨论来体会一下它的思想．我们仍取其经典函数

$$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2+bx \triangleq P(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$$

线性地看，这里

$$\boldsymbol{X}=(x^4,x^2,x),\quad \boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}a,b\right)\ \text{（}\boldsymbol{A}\text{ 实为二维）}$$

因此可以说突变理论对 $P(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$ 的分析就是在 (X,A)（叫做完全空间）上讨论的．这时广义地视 A 为 X 的对偶空间是有助于理解的．**注意：当 X 一定后，P 是由 A 唯一确定的二维空间**．于是这时可说突变理论是在讨论 $P(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$ 在 X 的对偶空间 A 上的变化特征时产生的突变概念——$P(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$ 在实空间 X 内的形态发生了“骤变”．同时还能进一步找出形态发生的（A 空间的）突变点集：解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=x^3+ax+b=0\\[2mm]\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}=3x^2+a=0\end{cases}$$

化简之可得

$$4a^3+27b^2=0$$

这是 A 空间内一条特殊的半立方曲线（见图 4.1），其上任一点都对应着“完全空间”上 P 曲线的一种突变的形态.

由此可体会到，有了对偶空间观点，哪怕只是广义的，也容易激起我们探讨对偶空间（即参变量空间）功能的内衷.

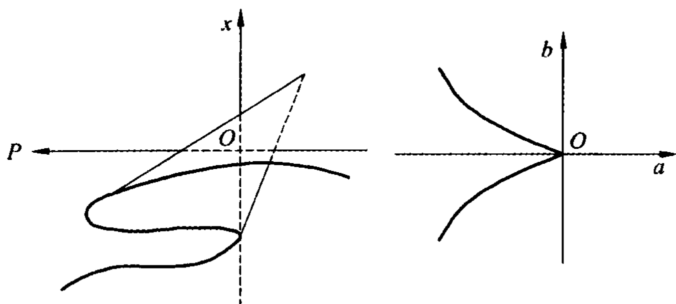


图 4.1

注：至此也许读者立即想起，规划论中不也深刻存在着“对偶”原理和求解时的“对偶”技巧吗？是的，而且那里的对偶空间正对应着拉格朗日函数所揭示的（λ）扩充空间，具体的内容请读者去温故即知.

二、赋范空间及多重线性空间的对偶结构

本段是对用“内积”关系来定义的对偶空间概念的继续推广、深化和应用.

1. 对偶概念的深化

为此，先给出泛函和线性泛函定义，再给出对偶空间的又一定义.

定义 4.1（泛函） 泛函是这样的空间映射 $F:X\to R$，它有如下几大特点：

(1) 映射 F 是一般函数式的广义化，可以用任何一个符号来表征．比如 $|\cdot|$（行列式或模），$\|\cdot\|$（范数），$\min\{\cdot\}$，$\int_a^b *$ 等．甚至比如 u-效用，W-评价，α-评判记分等映射，尽管给不出表达式（只是一种“心理映射”），但也都是一些泛函映射.

(2) X 是广义对象集．$\forall x\in X$，可以是几何点集（在坐标系下即是矢量集），也可以是一般实物、事物或事务对象、对象集．比如 x 可以是向量、函数、矩阵，也可以是人（人群）、商品、企业、社会等.

(3) F 是对 X 的整体映射，且 $F(X)$ 一定是个一维的数量（象值，属于 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$）．亦即，$F(X)$ 是个标量函数．关于泛函的微分叫做变分（例见式 (9-38)）.

例 4　$x = x(t)$，$t \in T$，$x \in (a,b)$，则

$$F = \begin{cases} F(x(t)) = F \circ x(t) & t \in T \text{ 是一般复合函数，它不叫做泛函} \\ F(x) & \text{对于}T\text{来讲，属于通常的泛涵概念} \end{cases}$$

例 5　有名的最速降线问题（约翰 · 伯努利，1696 年）是个泛函的极值问题（也叫变分问题），现举出其中的泛函如下.

图 4.2 表出质点自点 $A(0,0)$，沿 $\overset{\frown}{AB}$ 滑至点 $B(x_1, y_1)$ 的时间长为

$$\begin{cases} t[y(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^{x_1} \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \\ y(0) = 0, \; y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

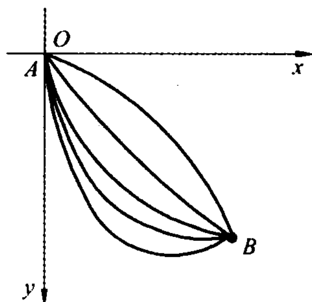


图 4.2

须知，这里 t 不是 x 的复合函数（x 通过定积分消逝了），而是曲线 $l: y = y(x)$，$x \in [0, x_1]$ 的泛函数，简称泛函.

总之，泛函的一大特征是“非几何点式”的函数，它是对其对象集或其子集抑或非几何空间元素的一种数值性映射.

定义 4.2（线性泛函）　对于泛函映射 $F: X \to \mathbf{R}$，若其中 X 为（数）域 K 上的线性空间，且 F 满足 $x_1, x_2 \in X$，$a, b \in K$，有

$$\begin{cases} F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \\ F(ax) = aF(x) \end{cases}$$

或简记为

$$F(ax_1 + bx_2) = aF(x_1) + bF(x_2)$$

则称 F 为 X 上的线性泛函.

注：注意泛函与线性泛函的定义差异. 后者在数学中已有丰富成果；前者（一般泛函，或叫非线性泛函）在数学中的系统化成果，至今还谈不上.

例 6　微分（包括高阶微分）和定积分都是线性映射（请读者自行检验）.

定义 4.3（对偶空间）　对于线性空间 V，记其上的一切线性泛函之集为 $L(V)$，$(\forall F \in L(V), F: V \to \mathbf{R})$，则 $L(V)$ 称为 V 的对偶空间. 换句话说，线性空间 V 的一切线性泛函之集 $L(V)$ 叫做 V 的**对偶空间**.

这一定义来得更为广义，同时也来得更为清晰、漂亮，但也显得有些抽象，这里指出：

• $L(V)$ 可理解为 V 上一切（线性泛函的）**函数式集合**，而不便理解为泛函值的集合，否则一切 $L(V)$ 都化为 $\mathbf{R}$ 值，而难以（作空间思维）考察其特性了.

• 定义 4.3 是"一"中向量空间对偶概念的推广，亦即"一"中对偶概念是定义 4.3 的特例. 定义 4.3 中 V 可以是无穷维的. 换句话说，可利用定义 4.3 方式给出更为抽象的对偶空间概念. 比如：

定义 4.4（赋范空间的对偶空间） 设 X 为赋范空间（概念见第十章第三节），记 X 上一切连续线性泛函之集为 $L(X)$，且定义范数

$$\|F\| = \sup_{x \in X} |F(x)|, \quad F \in L(X)$$

则 $L(X)$ 成为 Banach 空间，这时 $L(X)$ 叫做 X 的对偶空间，$L(X)$ 也称为 X 的"共轭空间".

• 这里，对偶空间 $L(V)$ 不一定与 V 同维；对偶空间的对偶空间（称为二次对偶空间）也不一定是原空间了.

2. 对偶概念的继续推广

我们不能不看到，即使在数学的严密理论和抽象的逻辑结构中，对偶概念和对偶空间、对偶变换等概念也被自然地推广到了十分广泛的领域. 比如几何学、代数学、拓扑学、分析学、运筹学中都分别有着越来越多的这类概念，诸如对偶模、对偶锥、对偶格、对偶根、对偶基、对偶丛及对偶代数、对偶曲线、对偶表示、对偶范畴、对偶定理、对偶算子、对偶剖分以及种种对偶空间、对偶集合等，概念之多，分布之广，以致不可能在这里对它们作出一一陈述. 尽管它们的定义各不相同，但存在一个共同的"对偶"思想. 这不说明别的，正说明了对偶结构在客观世界的广泛性和深刻性，因此我们更有必要掌握其思想实质.

特别地，为着后面的应用，我们这里再给出一类"对偶空间"及其上的"张量空间"于下.

3. 多重线性泛函与张量空间

对偶空间和**多重线性泛函**是张量空间的基本概念，而张量空间又是**张量代数**的基础；**张量代数**又是张量分析（又叫张量几何）的基础，它们一起又是"流形理论"的基础. 正是流形理论奠定了**现代分析**的基础，它是现代微分几何学、微分拓扑学、辛几何学、规范场理论等典型的现代数学学科所不可或缺的基础和工具. 由此可见，即使从这一脉络看，对偶空间概念在数学中的地位是何等重要了. 它们之间依秩的基础关系可参见图 4.3.

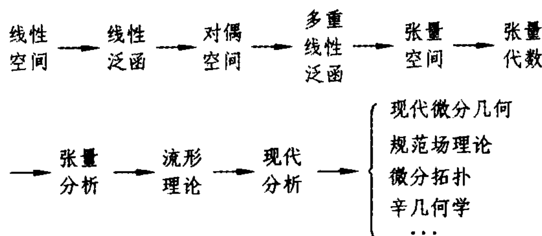


图 4.3

这里仅本着本节的宗旨，首先给出本节所需的起码概念，然后以一例来说明多重线性泛函概念及有关概念在张量空间中的重要地位.

（1）张量空间.

设$V_1,V_2,\cdots,V_r$为域R上n维向量空间，$V_1^*,V_2^*,\cdots,V_r^*$为其对偶空间，记

$$V^p=V_1\times V_2\times\cdots\times V_p,\quad V^{*q}=V_1^*\times V_2^*\times\cdots\times V_q^*$$

则$T:V^p\times V^{*q}\to\mathbf{R}$称为$p+q$重**线性泛函**，也叫做$(p,q)$型**张量**[①].

称一切这样的$p+q$重线性泛函之集$L(V^p\times V^{*q},\mathbf{R})$为$(p,q)$型**张量空间**，简记为$(V^p\times V^{*q},\mathbf{R})\triangleq\Gamma_q^p(V)$.

注意到(p,q)型张量中q对应着q重对偶空间之笛卡儿积，它对应的$p+q$重线性泛函式应该为p阶齐次多项式，其各项系数皆为q重参数之积. 比如:

例 7 设$T:V^2\times V^{*2}\to\mathbf{R}$, $n=2$，可有

$$(x_1,x_2;a_1,a_2)\in V^2\times V^{*2},\ni T(x_1,x_2;a_1,a_2)=a_1^1a_2^2x_1^1x_2^2+a_2^1a_1^2x_2^1x_1^2$$

$$\triangleq ax_1^1x_2^2+bx_2^1x_1^2$$

因此，鉴于V^*中元素的数值性和在多重线性泛函式中仅作为系数、讨论较少这一事实，为简便计，一般仅取$q=0$（确定参数，即仅对$\Gamma^p(V)$）来讨论.

（2）张量积.

设$T_1\in\Gamma^{r_1}(V)$，$T_2\in\Gamma^{r_2}(V)$，则有算子记为$\otimes$，使得$T_1\otimes T_2\in\Gamma^{r_1+r_2}(V)$，且满足:

$$T_1\otimes T_2(x_1\cdots x_{r_1+r_2})=T_1(x_1\cdots x_{r_1})T_2(x_{r_1+1}\cdots x_{r_1+r_2})$$

这时$\otimes$叫做张量T_1与T_2的**张量积**.

特别地，常常用张量积的形式将$\Gamma^p(V)$表示为

① 据定义，线性空间与其对偶空间不可能正交，因此本句中笛卡儿积“×”应理解成只是一种形式，下同.

$$\Gamma^p(V)=\Gamma^1(V)\otimes_1\Gamma^1(V)\otimes_2\cdots\otimes_{p-1}\Gamma^1(V)$$

又特别地，为张量分析的需要，还引入了：

（3）张量空间的基.

首先知，有限维线性空间必有有限基，且设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 V 的基，则也有 V^* 相应的基，可记为 $F=\{f^1,\cdots,f^n\}$．那么可以证明 $\Gamma^p(V)$ 也有基，且为

$$G=\{f^{i_1}\otimes_1 f^{i_2}\otimes_2\cdots\otimes_{p-1}f^{i_p}\},\quad i\in\{1,2,\cdots,n\}$$

共有 n^p 个向量.

这是因为 $\Gamma^p(V)$ 的元素是泛函 $T:V_1\times\cdots\times V_p\to\mathbf{R}$，它的基应取对偶基 f^{i_*} 形式.

理论表明，这时对 $\forall(x_1,\cdots,x_p)\in V^p$，可有

$$\begin{aligned}T(x_1,\cdots,x_p)&=T_{i_1\cdots i_p}f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_p}(x_1,\cdots,x_p)\\&=T_{i_1\cdots i_p}f^{i_1}(x_1)\otimes\cdots\otimes f^{i_p}(x_p)\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中 $T_{i_1\cdots i_p}$ 为表达式系数(若将 x_i 用基 E 表出,还有进一步确切的形式,这里免叙).

（4）例示.

这里指出，在张量空间的“基”的意义下，用“张量积”表出的“张量映射”具有行列式的形式.

例 8 设 $p=n$ 且 $x_i\in V_i$，即 $(x_1,\cdots,x_n)\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$，则有

$$f^{i_1}\otimes f^{i_2}\otimes\cdots\otimes f^{i_n}(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}f^{i_{11}}(x_1)&f^{i_{12}}(x_1)&\cdots&f^{i_{1n}}(x_1)\\f^{i_{21}}(x_2)&f^{i_{22}}(x_2)&\cdots&f^{i_{2n}}(x_2)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f^{i_{n1}}(x_n)&f^{i_{n2}}(x_n)&\cdots&f^{i_{nn}}(x_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)}f^{i_1j_1}(x_1)f^{i_2j_2}(x_2)\cdots f^{i_nj_n}(x_n)\tag{4.4}$$

其中 $(j_1,\cdots,j_n)$ 表全排列．从式（4.4）可看到：

① 行列式是一个泛函，也可用行列式表出一个张量（多重线性泛函）.

② 行列式中每一行都是 $\Gamma^1(V)$ 的一个基向量，每一元都是个内积关系（用基 E 表出 x_i 时）.

③ 各行间的关系（行列式结构），即 n 个 $\Gamma^1(V)$ 空间的张量积 $\otimes$ 关系.

④ 上述（典型的）行列式是 $p=n$ 的特殊情形．对于一般的 $p<n$ （$p>n$ 无意义）的情形，也有类似的形式：

$$f^{i_1}\otimes f^{i_2}\otimes\cdots\otimes f^{i_p}(x_1,\cdots,x_p)=\begin{vmatrix} f^{i_{11}}(x_1) & f^{i_{12}}(x_1) & \cdots & f^{i_{1p}}(x_1) \\ f^{i_{21}}(x_2) & f^{i_{22}}(x_2) & \cdots & f^{i_{2p}}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f^{i_{p1}}(x_p) & f^{i_{p2}}(x_p) & \cdots & f^{i_{pp}}(x_p) \end{vmatrix}_{p\times p}$$

事实上容易看出，这里张量也是“一、2”中例 3 谈到的线性多项式的推广.

三、对偶原理及其应用

已经看到，即使在严格的数学中，自然开发出的对偶概念也已十分广泛，这说明对偶概念是客观世界普遍存在的一种结构特征，值得去认识和掌握它. 那么要问，是否客观世界的对偶概念仅只数学所及的这些？由于我们相信，数学出于它的严谨性，至今对于客观世界也只描述了它的一个典型的、简单的甚至仅具有线性性的部分，而对其更为广泛的、复杂的、非线性的内容和综合形式，则描述甚少. 因而可信客观世界还有更多、更广、更复杂的对偶特征尚未被数学家揭示出来. 可是，作为数学“思维”我们可以超前，我们完全可以借此推广到一种**对偶思维**去认识它. 现在即让我们这样去作吧.

我们将从数学的对偶空间概念出发，对其作出适当的推广，然后用于观察事物. 为此先回顾一下对偶空间概念中所涉及的几个基本问题.

(1) 对偶空间概念用到了线性泛函概念. 必须强调，“泛函”概念具有非局部映射特征，它的映射对象不同于一般（函数）映射对象的几何点式特征.

(2) 一个空间（或叫系统、集合，也叫系统空间）X 经（线性）泛函映射后，即成为抽象对象（注意到“抽象”是空间层次的提升、升华），这时相对于系统空间 X 来说，其对偶空间 X^* 是**抽象**的，或说是虚的、软的. 这就是一般的对偶空间 X^* 相对于原系统空间 X 来说的“空间”特征表现. 至少 X 与 X^* 之间已不可能具有一一对应关系了.

(3) 正如线性多项式和张量中皆具有“(对偶空间) 系数与 (系统空间) 变数的并存关系”一样，在客观世界中对偶空间与系统空间也应该是并存的.

本着这些基本思想去观察世界，我们容易看到，对偶空间和“对偶”现象广泛存在着，因而可称其为**对偶原理**. 现略举几个方面的对偶现象于下：

(1) 经济学上的对偶原理.

例 9 经济学中金融空间是商品空间的对偶空间，说金融经济属宏观经济学也是这个道理. 经济学即由这样的金融和商品“二象”构成. 金融空间和商品空间还具有较为严格的、数学意义下的对偶性. 因为这时设商品空间为 X（n 维），

则其所有可能的价格（n 维向量 $\boldsymbol{p}$）将构成一个 n 维价格空间，并决定了一个 n 阶满秩方阵，记为 $\boldsymbol{P}$，因此任一价格向量 $\boldsymbol{p}$ 与任一商品向量 $\boldsymbol{x}$ 作内积（得线性泛函 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$），即将其映射成金融空间（记为 Y）的货币值．亦即当 $\boldsymbol{y}\in Y$，$\boldsymbol{x}\in X$ 时，有

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

也许会问，金融库里的货币值不就是 R 中一维变量吗？何以成为 n 维商品空间 X 的对偶（同维）空间？其实，这正是一般的对偶空间在实践中体现出的抽象特征，甚至有的还表现为无形的空间．事实上正如定义的注释所说，这里的金融空间是由 $\boldsymbol{P}$ 决定的．$\boldsymbol{P}$ 中每一行都是 X 的一个线性泛函“算子”，且是金融空间 Y 中一个独立元素．这样看，对偶的“空间性”便明显了．

此外，再作广义的认识，经济社会中这种对偶关系还有很多，比如经济和经济管理也是对偶的，请读者继续思考．

（2）社会组织中的对偶原理．

社会组织系统一般是一个复杂系统，不过只要表出它的系统空间及其对偶空间，即可最终表现其对偶性．

这里仅以一个学校中的组织结构为例来讨论．一般社会组织的对偶原理则可触类旁通．

例 10 图 4.4 给出了一个学校作为系统空间的结构特征．

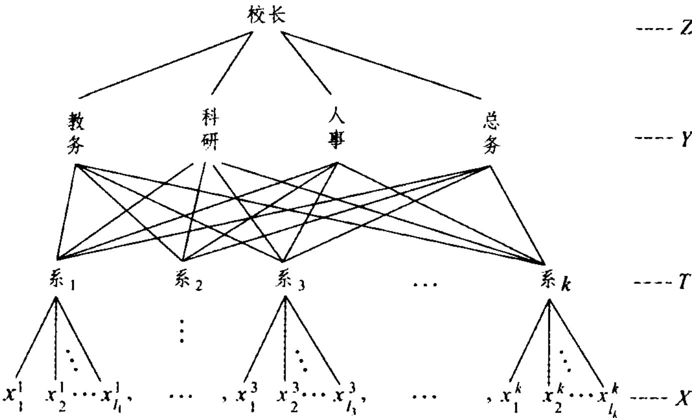


图 4.4 (X,Y)

如图 4.4 所示，把一个学校记为 (X,Y)，它就是学校这个系统的系统空间．这里包括一切人员、设备，同时该系统还有个“目标”或叫“核心”，这就是 Z，称为“校长”吧．在 X 和 Z 之间则视其系统的复杂性程度可以是多层的结构，图中

所示是个简略的示意，仅取了两个层次，即 Y 和 T. 从职能上看，Y,Z 是一个级别，因为 Y 是 Z 的派出机构，它行使 Z 的权力，但从待遇来看，Y,T 是一个级别，皆为处级. 其实比如 T 和 X 之间也至少还有个科级等，兹予免记.

还可看到，从图 4.4 的系统来看，它的基本特征类似于欧氏空间中多元函数关系. 比如 Z，它处理它以下各元素（Y 中元素，Y 层次上的变元）的问题，直接与其一个个的变元发生关系，而 Y 中每个对象又分别与其下的 T 中各元素（相对说来，在该层次上的变点）发生关系，如此等等. 总之，其中的关系主要表现为类似欧氏空间上的函数关系. 只是:

① 这里的“变元”已广义化了，为其某个层次的系统元素.

② 这里的关系也因系统的复杂性，不能完全看成欧氏空间中的一般函数关系，而是广义化、思想化了的.

例 11 再表出 (X,Y) 系统的对偶空间结构特征.

如图 4.5 所示，作为图 4.4 系统空间 (X,Y) 的对偶空间，我们记为 $(X,Y)^*$.

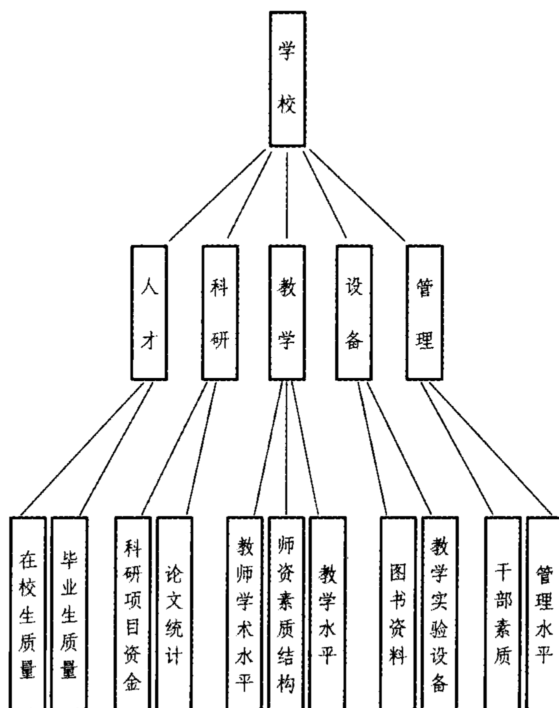


图 4.5 $(X,Y)^*$

容易看出，这里 $(X,Y)^*$ 实际上是 (X,Y) 的一个评价系统. 的确容易判定出，

一个系统（系统空间）的评价系统就是它的一个对偶空间，其指标体系即其对偶空间坐标系．同时看到：

① 即使在数学的严格、简单情况下，对偶空间也不一定唯一，推广到一般情形则更是如此，所以我们说上述 $(X,Y)^*$ 是 (X,Y) 的“一个”对偶空间．

② 可以看到 $(X,Y)^*$ 中各层元素，已不具有 (X,Y) 中各层元素的实际存在性（实际的组织机构），而是抽象的．

③ $(X,Y)^*$ 基层中的各项指标值都是对整个 X 层空间的映射，因而是一种泛函映射．换句话说，基层中各个量如果仅从 X 中个别元素取得是没有意义的，必须在 X 整体意义下映射成的值才能代表相应指标量，这正是泛函映射特征，从而体现了整个空间的对偶空间特征．

总之，推广例 2、例 3 可以看出，社会上一般系统都同时存在着系统空间及其对偶空间这样的结构特征．这就是对偶原理在社会组织系统中的表现，只是这里不是完全凭借数学（线性）的严格概念，而是作了推广性的“思维”．

之所以说这里是作了“推广性思维”，主要在于对社会系统的“线性性”未作严格考察，但也不能说这里一点不合线性性．不难理解在一定意义上上述映射还是具有线性特征的．此外，对偶空间不必与原空间同维这点，即使在数学中也是允许的．比如 Y 是否归为 4 维空间，这只是相对于实际对象的简化程度来说的，凭其需要完全可以加细，其对偶层次也还可以加深，所以说维数性在这里已成为非本质问题．

通过这一对偶空间思维，可以加深我们对客观事物的观察能力，增加了一种认识客观世界的观点和手段．比如借此可以更深刻地观察一个企业、一个部门、一个地区乃至一个国家组织的结构特征，甚至可作抽象的形式化描述和分析（参见拙文《一类多层结构系统及其应用》(成都大学学报（自）1994.2)．

（3）医学理论中的对偶原理．

医学理论中每每体现出人的躯体空间与其对偶空间的对偶原理．这里仅以一例作简要说明．

例 12 经典的中医诊断理论也显示了对偶原理．

如图 4.6 所示，皆知人体是个复杂系统．设人体为 L 空间，则中医诊断所用的望、闻、问、切四种手段中，每一手段都是对 L 全空间作出的（因而是泛函的）映射，且四种手段之间不具有替代性，所以彼此独立，因此可以把这样的所有（可认为是线性泛函）映射之集视为 L 的对偶空间 L^*（四维），有 $L^*=\{(望、闻、问、切)\}$．从

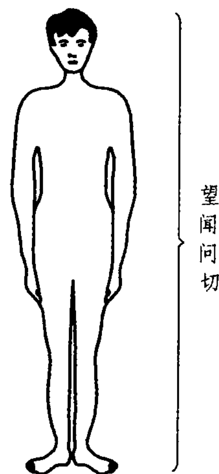


图 4.6

而在中医理论中，人体有着完全的空间结构，记为

$$TL=(L,L^{*})$$

四、系统变量、参变量与影响因素辨

如图 4.7 所示，其中(X,X^{*})是按对偶原理表出的一个“完全系统”，ω是它的环境（注意到任一客观系统都是开放系统），几何的说法叫做邻域．若对其进行数学建模，我们往往是站在X空间来分析问题的．因而首先得出系统 X 的变量，记为$(x_1,\cdots,x_k)$，亦即视 X 为 k 维空间，以下简记为$X\triangleq(x_1,\cdots,x_k)$，那么该系统的目标$S$是$X$的函数，可表为

$$S(X)=S(X;A) \tag{4.5}$$

其中X是自变量，A表参变量．这时参变量的含义较广，包括X^{*}的作用和ω的外来作用．

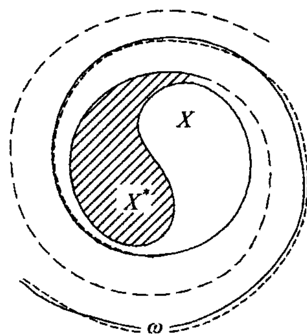


图 4.7

同时，作为模型的近似性，对同一系统也可能取X为$(x_1,\cdots,x_r)\triangleq X'$，$r<k$．显然这时的模拟空间$X'\subset X$（变小了），这时记模型为

$$S(X')=S(X';A') \tag{4.6}$$

其中A'表现为参数个数，不一定增加（一般随模型简化而减少），但它涵盖的领域却扩大了，它包含$X^{*\prime}=X^{*}\cup(X\setminus X')$和$\omega$的作用．但一般说这时$S(X')$不如$S(X)$精确．

特别地，我们也可把A（仍对式（4.5）来说）中属ω的成分析出来，可表作

$$S(X)=S(X;A;\xi),\quad \xi\text{来自}\ \omega \tag{4.7}$$

当ξ是对系统的随机干扰时，ξ叫做噪声；当ξ为人为干预时，ξ叫做控制．

例 13 设(X,X^{*})为一个企业，X为生产投入，投入向量$(x_1,\cdots,x_k)\triangleq X$；$X^{*}$为其设备水平、人员素质、管理水平、服务质量等；$\omega$为其市场环境，则这时该系统的目标——“生产”映射可记为

$$S(X)=S(X,A) \tag{4.8}$$

这里$S(X)$一般为非线性函数，且难于精确获得，不过$S(X)$常常具有充分的光滑

性，且据泰勒展式知其在一点（如 X_0，也可为 0）处的线性式为其“主量”，所以一般可简单地取作线性式来讨论，即可取

$$\begin{aligned} S(X) &\approx S(X_0)+S'(X_0)(X-X_0) \\ &= S(X_0)-S'(X_0)X_0+S'(X_0)X \\ &\triangleq C+BX \end{aligned} \tag{4.9}$$

可以看出，在式（4.8）中的 A 即式（4.9）中的 (C,B)．从对偶意义上讲，它们属 X 空间的对偶空间；从数学分析意义讲，它们来自函数 $S(X)$ 在 X_0 处的位置与变化趋势等“属性”．可见对于一个函数，它的参数空间是与其导数直接相关的，或说对于任一个函数 $f(x)$，其（作为“实空间”x 的对偶空间）“属性”也蕴涵在 $f(x)$ 之中．不过在实践中当不知道 $S(X)$（或一般的 $f(x)$）时，一般不可用展式方式去求得 C,B，而是比如通过样本组（实际上是一组泛函值）用统计方法去获得．显然，它的实质是个泛函的逆问题．特别地，比如在生产系统中常常可取 $S(X)=X$ 而使式（4.9）成为典型的投入-产出模型，这时只须通过生产过程中的有关数据即可方便地获得 C,B，C 叫做**社会纯需求**，B 为投入**系数矩阵**．

当然，模型（4.9）是作为封闭系统来考虑的，这时 ω 的作用已笼统地体现在 C,B 中了，当需要的时候也可以将其析出来讨论．

总之，我们看到，在“对偶原理”这一高观点下，对任一系统的种种分析及其变量、参量、外来量等的认识，将会变得更为清晰．实际上这也属于如下“二象论”观点下的分析内容．

第二节　二象性原理

现在从物理学角度认识一下客观世界中的对偶结构，这就是物理学中的“二象性原理”．它是一种普遍规律，这点可由观察得到，以下即着重从观察着手．

一、微观世界的二象特征及其机理认识

1．从光的波粒二象性谈起

在今天，人们已普遍接受，光具有波粒“二象性”．本章用到的“二象”概念也来自于斯，这里不再定义．所谓“波”，即场的表现形式，具体说是场中能量的传播形式．19 世纪已证实光波就是一类电磁波．所谓“粒”，即具有大小、质量的实在的

物质体. 爱因斯坦还用两个**基本方程**将光的波粒二象统一起来，这就是

$$\varepsilon = h\upsilon, \quad p = h/\lambda$$

其中ε为光粒子能量；h为普朗克常数；υ为光波频率；p为光粒子动量；λ为光波长.

2. 量子力学之争的实质

我们知道量子力学之所以得到承认，曾经历过十分艰难的争论过程. 最早的争论是围绕着量子力学不合经典力学的问题，当时即使因提出量子概念而对量子力学贡献颇大的普朗克（为此获得过诺贝尔奖）也总认为量子力学应该符合经典的电动力学，把量子吸收能量的过程，仅视为连续过程. 嗣后的争论焦点是围绕着玻尔提出的“互补原理”（1927 年）与爱因斯坦的争论. 再往后则围绕着所谓“量子力学的完备性”争论，非正统派认为不完备，并提出“隐参数”理论以求完备它，争论一直相持不下.

实际上今天容易看出，哪一种争论都属于未意识到量子世界的“二象”性特征的争论. 亦即不管是坚持粒子论的还是坚持波动（场）论的都是偏颇的，坚持哪一个确定的“象”都是一种经典物理的思维模式，是旧观念未得到突破的表现，真理原来只是两者的折中—— 承认场、粒二象的共存.

3. 量子世界的测不准原理

海森伯于 1927 年提出了“测不准”原理：设x表示质量为m的以其“自然”的运动速度运动着的微粒位置，p表示其动量，则据玻尔的观测可推出

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{h}{2}\left(1+\frac{4p}{h^2}\left(\frac{t}{m}\right)^2\right)^{1/2}$$

其中h表示普朗克常数，t表示时间，Δx是位置的测量方差，Δp是其动量的测量方差，亦即$\Delta x \cdot \Delta p$不小于$\frac{h}{2}$，所以不可能同时提高p, x的测量精度.

这是为什么？玻尔解释为“随机性引起的”. 虽然不错，但也只是一个非本质的说法. 因为随机性只是一种相对的说法，只是说明所考察事物的因素太多无法完全把握而产生的现象. 比如抛硬币实验，每次抛币后按它本身的运动规律和初始条件，客观上说它的运动是有规律的，是符合因果律的，所以本身就应该由其全部条件（因充足理由而）决定着它的实验结果，但是因为实验者没有能力去测知和把握所有因素、条件，才不得不作为所谓“随机问题”来处理，用统计实验方法去认识. 由此看来说是“随机性引起的”即是非本质的说法了.

用“数理思维”不难看到，应该有一个x, p共同的影响因素存在（记为λ）

使得，比如若 $x(\lambda)$ 是增函数则 $p(\lambda)$ 应是减函数，于是当 $\lambda \to 0$ 时 $\Delta x \cdot \Delta p$ 可能是 $\varphi(\lambda)/\phi(\lambda)$ 型“0/0未定形”. 事实则是，该极限为常数（$h/2$）说明 $\varphi(\lambda)$ 和 $\phi(\lambda)$ 是同阶无穷小，同时已知这里 λ 是微波波长，皆合理.

此外，用“二象观”亦能理解（第四节），比如在微观世界，粒子的虚象较强，这时按非标准分析思想（第十一章第三节），其“单子”邻域中即有“测不准性”（因这时不满足“阿基米德定律”）.

现在已不难理解，“测不准原理”也是微观粒子的“二象”性引起的. 根本上说是因为微观世界存在空间特征的改变，且与介观世界在其“二象”的权重比上存在重大差异造成的（参见后）.

4．关于物质可分性之争

在理论物理上，与寻找“基本粒子”相似的研究过程是，一直进行着一个物质可分与不可分的哲学争辩，中国哲学家也参与其中. 比如，我国金吾伦与王干才之间即有过激烈的物质可分性争论（例见光明日报 1986 年 336 期哲学专栏与 1986 年 12.8，光明日报）. 大体说来在理论物理上中国学者属于可分论学派，也叫层次论学派（即分割物质犹如剥葱，可一层一层无限剥下去）；美国学者则属不可分学派，他们认为物质存在基本层次，深入到此即算终结. 1994 年发现的所谓 Top 夸克现象对可分论学派是一个鼓舞，但即便如此，两派的争论形势一如当初光的波粒之争以及量子力学的系列争论，似乎谁也降服不了谁. 这是为什么？从它们都有相持不下的共生特性这点不难猜想，其根本原因也在于对物质的“二象”性结构特征在又一层次上的认识问题.

总之，我们不能不承认，（至少）在物质微观世界，普遍存在“二象”性结构. 今天用这一观点去观察近现代史上系列争论易知，已达统一者皆可归结为对“二象”性认识的统一，未达统一者，其争论本质也在这里.

二、宏观世界的二象性结构

我们已经看到，微观世界具有“二象”性结构特征；大自然具有分形结构特征；二象之间或一波一粒，或一场一质，或一虚一实，皆系一种虚、实结构特征. 本着这三个观点来考察宏观世界，我们仍然可以看到清晰的“二象”性结构.

1．相对论空间是由二象构成的

相对论空间系指具有质量、体积且有形的物质宇宙（简称有形宇宙）和四种基本场（电磁场、引力场、弱场、强场）以及时间（t）、空间（$\mathbf{R}^3$）等的总体. 这

时容易看出，有形宇宙是其**实象**，余下的基本场和时空($\mathbf{R}^3\times t$)本身即为其**虚象**. 而且容易根据上述“二象”结构的各种特征考察得知，二象间每一特征在这里皆具有各自的**存在性**和相互间的**无矛盾性**[①]. 因而可认为这里“虚实二象”也是相对论空间的二象构成特征.

2. 形式逻辑背景空间具有二象性特征

在第五章将看到，形式逻辑背景空间实际上是由相对论空间及其属性空间（由相对论空间决定的整个形式逻辑范畴）构成的. 那么，若我们把相对论空间视作实象，把由它决定的形式逻辑范畴视作虚象，则这一系统仍然满足二象性特征的存在性和无矛盾性，从而认为形式逻辑背景空间也具有“二象”性结构特征.

3. 进一步的认识

其实认识宏观世界也与认识微观世界一样困难、坚深，难以进展. 比如在相对论空间以外还有没有空间，或者在形式逻辑对应的空间以外还有没有空间，它们的“二象”性结构如何等问题，可以说是科学还没有真正触及到的领域，但是否可以肯定在这些空间以外，没有空间了呢？却又不能这样说. 比如宇宙学上1965年得知“宇宙有背景空间”；玻姆也感知到“**客观世界存在以光为联络信号的领域以外的领域**”；另一物理学家卡普拉也曾说“**物理学的根本缺陷之一是缺乏对其环境的考虑**”，这里“环境”不正是对物质世界的虚象感悟吗？再说，牛顿40岁以后致力于研究抽象世界，爱因斯坦把后半生全部献给了“统一场”这一探寻客观世界本质的工作. 须知，“统一场”不是四种“基本场”的拼合，而是一个更高层次的“虚象”存在. 所有这些都说明了什么？是否可以说，科学家**思维的进一步深刻化，必将导致他对抽象（对偶）世界的感悟和兴趣**？如果是这样，那么在科学发展了的今天就更有条件探索这些了，不过这已超出本书范围，留到另册去讨论（例见拙著《大自然复杂性原理》）. 这里只在于说明，即使宏观世界的“二象”性结构层次，也有继续探索的余地.

三、二象结构的普遍存在性

二象结构在客观世界，除了在上述物质的微观世界和宏观世界广泛存在外，本段将表明，它在介观世界，也叫中观世界包括自然界和社会生活中，也普遍存在着. 而且可以说人类从生活出发对介观世界的二象结构特征认识，很早即有了

① 这里勿须考虑完备性. 因为严格说来正如一切客观系统不可能有绝对的封闭系统一样，也没没有绝对的完备系统（除非是绝对的最大系统）. 一般的完备性和完备系统只是人为界定的，我们这里勿须界定它.

(只是还没有“意识到”罢了). 关于这点从各个古老民族语言中也可观察到，比如汉语中的（软、硬)、(阴、阳)、(虚、实）等对偶概念即表明了这点. 又如:

中医理论早就把人体视作阴阳对偶的二象构成，以此出发建立的医疗理论和方法，其效果有时甚至是独特的，是其他医疗方法不可替代的. 另一方面也可以看到，西医是来自自然科学的解剖学和化学实验的，具有**实在性**.

特别地，在二象意识下观察中、西医便十分清晰了，原来它们正是人类医学上的一个二象结构. 这时，过去争论的焦点就都明白了. 比如，为什么中医理论具宏观、整体性特征，而西医理论具微观、局部性特征；为什么中、西医都有效，但各有特效；西医根据自己的理论去批评说“中医没有道理”，它这是道理吗等类问题皆在“二象”意义下迎刃而解了.

此外，还可看到，数学中也存在着（意，形）＝（思想，公式）这个“二象”关系. 那么，可见初学者往往重“形”而忽“意”，这也是不正常的.

再则，在社会思想工作中常常强调既要务虚又要务实，要虚实并举，强调硬件软件配套，在作对策时强调软硬兼顾……这些都表明，人们在社会生活与政治生活中已经广泛地“承认”了事物的二象特征.

这里要解释一点，在经典的自然科学（近代科学）中还没有“二象”意识，那时的科学为何仍能很好地发展？我们说这正好说明，虽然二象性结构特征在微观和宏观世界是不可回避的，但在中观（近代自然科学）世界，是可以略去虚象(因这时的虚象所占比重很小）而只近似地考虑其实在（实象）一面的. 因此这时作这种近似是可以的. 过去我们是不自觉(凭借“自然”)地这样做了，也成功了，但在宏微观世界，阴阳二象的权重比更接近了，再继续这样就不行了. 这就是已有的实事. 特别地，如今科学已进展到在宏、微、中观上都需要承认二象性原理的时期.

一旦把二象性上升成意识，形成二象性思维，必将有助于能力的提高. 比如我国工程师曾用二象性观点认识土壤结构，看到了土壤结构中也始终存在着空间(虚）的部分，以此原理创造出了更好的对付滑坡、防塌的技术设施；科学家还据二象原理在计算机科学中提出了软件、硬件概念，不能不说对其发展起到了促进作用，软、硬概念在现代科学分类上也起到了积极作用.

特别地，不能不说“阴阳论”是整个东方哲学的精髓，它之所以有如此大的威力，根本在于它揭示出了客观世界的“二象”本质，它将永远正确，可以说“二象论”只不过是站在现代科学环境对它的发展与丰富罢了.

总之，可以说客观世界不管是从宏观、中观、微观，还是从科学的、生活的角度，都已广泛地“承认”了(显示出了）二象结构和对偶结构的普遍存在性. 至

于为什么大自然会有这种奇妙的结构，我们在拙著《大自然复杂性原理》中有过论述．基本思想是，当初“大爆炸”产生物质宇宙的同时，其“基本粒子（实象）”即有了“场”（虚象）特征，从而一开始就有了基本的“二象”结构，且其“场”又表现出具有吸、斥作用的“正、负二象间互动”机制．此后，按康德的“二律背反”原理，在其（136 亿年）演化过程中，正是这一基本的“二象”机制使宇宙变得越来越复杂了，包括物质宇宙的属性空间，如逻辑、运动等都具备了这一“二象”性．这就是现在看到的充满整个客观世界的“二象”结构特征，也都是符合现代宇宙学实证结论的．数学是大自然的产物，“二象论”对它当然也不例外．

第三节　对立统一律与完全空间论

一、完全空间概念的引入

至此我们已经看到，科学进入 20 世纪末，在物理学和数学中分别认识到的“二象原理”和“对偶原理”原本就是客观世界普遍存在的同一个结构规律，也就是产生于 19 世纪末的辩证逻辑认识到的“对立统一律（原理)”，同时它也是中国古典哲学中提出的“阴、阳说”．这是因为尽管它们各自的提法不同，但其概念都有个根本的共同特征（见二）．它们之所以有不同的提法，是因为各自的研究是独立的，且研究的角度和特色也不同．物理学源自自然界物质微粒的研究，所以更多的是描述其虚实二象；数学源自对抽象空间的研究，所以能更多地表述其虚（对偶）空间与实（原象）空间的泛函关系和映射特征．不过出于数学的严密性，它仅对具有线性特征的空间或局部问题作出对偶描述，而对一般的非线性空间尚未能作出如此漂亮、简洁、深刻的描述，剩下的只能靠我们的思维去作推广了．至于哲学，具体说是其辩证逻辑，则来自对大自然的认识论研究，侧重于把观察对象作为一个完整的“系统”，去认识它的“矛盾”和“统一”两面．

总之，综合上述各种提法，已经看到，原来物理学的“二象”论，数学的“对偶”论和哲学的“阴阳”论、“对立统一”论皆系各自独立对同一个大自然的同一结构特征的某种刻画，因此现在可以给出一个统一概念．

定义 4.5 (完全空间)[①]　对一个系统当从虚实二象或说对偶二象抑或说对立统一两面去考察其结构特征时，该系统称为一个**完全系统**或(系统的)**完全空间**.或说系统的完全空间是由“二象”构成的，二象间具有对偶性和对立统一特征．

① 这里取“完全空间”是为了回避“完备空间”的严格性和人为性（见第二节的注）．

二、完全空间中对偶二象的特征认识

1．对偶二象的互补性

所谓**互补**即合作或协同，由于虚实二象具有各自独立的、不可替代的功能，这时的“协同”将显出更强的功效，犹如弓与箭的关系．这是因为系统的“完全空间”结构是自然结构，它本身就是在自然意义下的最优（所谓“天衣无缝”），所以系统自然的“二象”结构是一种最优匹配，它们的功能“互补”就是自然的了．这就是玻尔在量子理论中说的“互补原理”的广泛存在性，也是系统论中肯定了的“系统元素间围绕着共同‘目标’的互补性”，因此这已是得到共识的原理，不必多作解释．

当然这里作的只是认识论的解释，至于“互补性”的本原论认识尚谈不上，从实证论角度说还是个谜．

2．完全性

一个完全空间的**完全性**是指其（整体）功能将比它的对偶二象分别的功能之和更强．比如，复数域(x,iy)是个完全系统，不仅数的运算在其上得以“完全”，数学上许多在实数域上难以解决或解决不了的问题，包括一些诡辩问题，纳入复数域后即能解决．一个熟知的例子是，欧拉当初证明 n 次多项式必有 n 个根的结论即必须在复数域内才能得到．又如，级数 $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^{2i}$ 仅在 $|x|<1$ 内才收敛，这在实数域内难以理解，一旦纳入复数域即立刻清楚了，原来 $x=\pm i$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的奇异点……

又，诸如调和分析、拉普拉斯变换、Z-变换等若干方法中的关键，即引入虚象因子（从微观到宏观）作分析（例见第八章第四节）．

此外，比如我们抓工作时的“虚实并举”也表明，抓完全系统比仅抓其一象的效果来得好、来得全面，这也是“完全性”的表现．

用古典哲学说法，完全性就是“阴阳合璧”功能．完全性也有别于数学中完备性与运算封闭性，尽管它们也有类似之处．

特别地，从系统论角度可说，完全性即“完全空间功能＞对偶二面分别功能之和”．这就是有名的“1+1>2 原理”．换句话说，完全空间的完全性是其互补性的又一提法．

3．对立统一性

对立统一性，即二象间同时存在对立和统一两个矛盾方面，亦即“既对立又

统一”. 这是对偶二象间一种功能表现，实则**“对立产生动力，统一产生进步”**缺一不可.

因为“完全空间”必完全地含有对偶二象，而据辩证逻辑，“对偶”二象间必同时具备对立性和统一性. 只是我们更应看到，“对立统一性”不仅表现在社会系统中如此，在自然系统中也如此. 比如，微观粒子内有一种斥（弱场）、吸（强场）功能，正是这一功能使之保持着一种虚实结构才不至于使粒子的质量乃至物质的质量集中（塌陷）至“一块”或任意排散开去. 又如，一个组织系统中团结固然重要，但若没有了监督机制或反对意见，它仍然难以兴旺. 这些都说明一个系统的“完全性”（对立统一性）的重要意义.

4. 完全空间的稳定性

一个完全空间，当其对偶二象达到某种“均衡”状态时，称该系统产生了“稳定”. 这里只是说完全空间有达到稳定状态的可能，亦即存在对偶双方达到均衡状态的可能. 它既表明这种稳定是有条件的，又表明仅有一象的（不完全）系统不可能产生这种稳定. 对此也可作形式化的讨论，留到“三、1”段.

例 14 一对夫妻是一个完全系统，有人总结出“老夫妻间性格协同”律，亦即如果知道了一个成年人的为人和性格特征，那么他（她）的“对偶”也大致如此. 这也是系统的二象间达到一种统一、均衡或稳定状态的表现吧，否则该系统早就破裂了.

5. 对称与守恒、破缺与涨落

对称概念十分丰富，在数、理、化、生中根据不同对象，存在多种提法. 归结起来可分作几何（显）对称和函数（隐）对称. 它们又可归结为“一种映射的不变性”、“某种导数或变分为 0 的状态”等，所以又叫做稳定“性”、均衡“性”、守恒“性”. 在理论物理上有个“对称守恒律”；著名女数学家，近世代数之父 Nother 也证明“有对称必有守恒”. 广义地还可说“对称”也是完全系统中对偶二象达到的一种均衡状态. “三、1”的讲述将表明，对称二象的稳定状态也是一种映射的不变点，因此它也是完全空间的稳定性原理在物理学上的一种体现. 借此可进一步理解到，当对称产生破缺时稳定性即受到破坏，这时对偶二象间将产生动荡（失稳）. 这就是系统论说的涨落，也叫互胀，目的是“寻求”新的均衡、新的稳定，实属自然. 须知涨落并不都是坏事，一个系统的进化与进步都需要首先打破平衡、产生对偶的破缺（不稳定），从而产生涨落，进而达到新的更先进的稳定态.

6. 二象互根

注意到在数学的对偶向量空间中，对偶二空间仅在“原点（根部）”是共同

(互相重合)的.在此点以外将不再有重合点，如图4.8中向量空间(a_1,a_2)与(x_1,x_2)对偶.看来似乎两个系统都在一个空间，但比如图中的m点，它在两个坐标系下的坐标即有质的不同，量纲也不同，所以不能说(x_1,x_2)空间的m也是(a_1,a_2)空间的m.实际上m对应到(a_1,a_2)空间即成了m^*点.总之我们说，对偶二空间的元素在本质上是不同的，它们只在原点才有重合、才能相通.若要从一个空间“走”到另一空间只有先到达原点才能转过去.若把原点叫做“根”，则说该对偶二象“互根”.由此推广地看，一般完全空间中对偶二象间也有此“互根”实质.同时可看到它与哲学上说的“阴阳互根”概念也有共通之处.特别地，它还启示我们比如隐式方程$F(y,B)=0$中变量y空间与参变量B空间不是“互根”或不只是“互根”的.

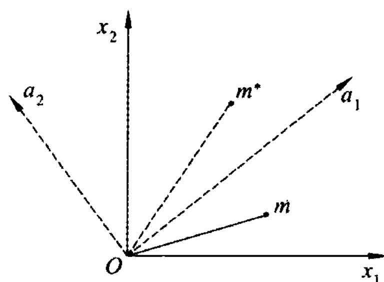


图 4.8

此外，客观世界还存在二象的层次结构、二象的复合结构等，不再一一列述，有兴趣的读者可作独立思考.

注：还有这样的问题，生活中常见油灯在熄灭前的反照、黎明前的黑暗、大楼统一熄灯时的回光、拧紧细流的水龙头时产生的反冲、暴风雨前的平静、生物死前的“回光反照”等现象，这是为什么？也许属于二象转换时，互根性引出的一种特殊情形.看来它们表现出了二象结构间一种内在规律.这在能量意义下我们在另著中把它叫做“绳端原理”，也值得从“二象论”角度去发掘它的机理.

三、完全系统中二象“互动”关系的描述（几个模型例）

观察表明，任一“完全系统”的二象都不是绝对均衡（对称）的，而是存在着对称的“破缺”(非完全性)，表现为系统对外的开放性和对内的二象“互动”现象等，那么这种互胀的能量（或说动力）从何来？根本上说是来自开放系统外的能量输入或信息输入.因为一切非人为系统（空间）中除了“大宇宙”是个最大的完全空间(甚至完备空间)外，任何一个完全系统以外都还有空间，互为“邻域系统”，同时也通过邻域而相互交换能量（信息）.还容易观察到，一个完全系统的“有机性”越强，则其二象互胀就越频繁、越复杂.

基于上述认识和“二”中对完全系统的特征认识，我们对此给出如下几种形式化描述.

1．对偶二象间涨落模型

记完全空间 $\Phi=(S,H)$（实象、虚象），$\dot{S}=\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$，$\dot{H}=\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$，则据已有的认识，可表出 S,H 间的动态关系为

$$\begin{cases}\dot{S}=f(S,H)+e_1\\ \dot{H}=g(S,H)+e_2\end{cases}$$

其中 e 为来自环境（邻域）的 +(−) 能量，从控制论角度讲也叫控制项.

进一步可表为

$$\begin{cases}f(S,H)=\lambda(a-S)f_1(S,H)\\ g(S,H)=r(b-H)g_1(S,H)\end{cases}$$

其中 a,b 分别为 S,H 达均衡（对称）时的当量值；λ,r 分别为调节系数.

特别地，一般的外来信息输入不一定在二象间同时产生．比如可令 $e_2=0$，同时若特别地取 $f_1=H$，$g_1=S$，则模型可简化成

$$\begin{cases}\dot{S}=\lambda(a-S)H+e_1=e_1+\lambda aH-\lambda SH\triangleq e_1+aH-\lambda SH\triangleq P\\ \dot{H}=r(b-H)S=rbS-rSH\triangleq bS-rSH\triangleq Q\end{cases}\tag{4.10}$$

这是个可以运算的二阶常微分方程组（经典的自治动力系统）.

如图 4.9 所示，在 (S,H) 完全空间画出式（4.10）的竖直等倾线 $P=0$ 和水平等倾线 $Q=0$，而且 $\begin{cases}P=0\\ Q=0\end{cases}$ 的交点为

$$N=(0,-e_1/a)\text{ 及 }M=(S_0,H_0)=\left(\frac{ab+re_1}{\lambda b},\frac{b}{r}\right)$$

由于实践中应有 $H,S\geqslant 0$，所以 M 是二象间的最终均衡点（即二象对称点或自组织均衡点），亦即“二、3”中说的稳定状态．再表出各区域内的方向场，如图 4.9 所示，即可大致定出该完全系统（4.10）二象间的动态（自组织）过程，如图中轨线族所示．由于模型不够精细，尚未表出典型的涨落特征，不过仅此足见一斑，此属常微分方程定性理

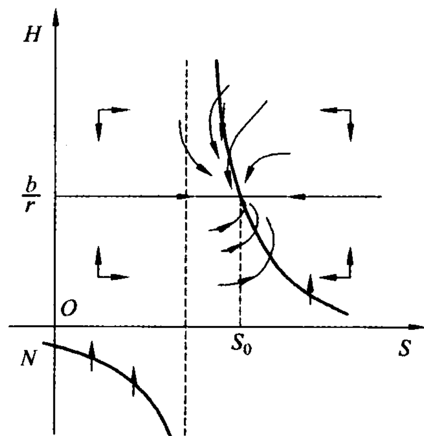


图 4.9

论（又叫几何理论）的应用．[①]

特别地，在二象观点下，一个系统与其环境（邻域，也是个系统）间也构成一个二象的完全系统，这时环境即作为原系统（拙作“邻域系统论”中称作“核”空间）的对偶空间．

2．有机体对环境的适应性描述

记“完全系统”$E=$（一个有机体，环境）=（核空间，对偶空间），换句话说 E 就是一个开放的有机体．

特别当仅考虑在某种环境信息下，“核”受这种信息持续作用后的改变规律时，可以把“核”与环境的作用考虑为一对对偶场的作用，记此对偶场为 $E\triangleq(u,v)$，这里 u 表现为维护原有系统稳定状态的功能，v 则是外来的改变 u 原有状态的功能．

这时可把 u,v 间的相互作用视为扩散反应机制，只是这里应视扩散为扩张（加强自身的努力），因此可参照扩散反应方程，取模型的基本形式为

$$\begin{cases} u_t+a_1\nabla^2u=f(x,t,u,v), \quad u=u(x,t), \quad v=v(x,t), \quad x\in\mathbf{R}^m \\ v_t+a_2\nabla^2v=g(x,t,u,v), \quad u=u(x,t), \quad v=v(x,t), \quad x\in\mathbf{R}^m \\ \text{边值}: r_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+r_1u=0, \quad r_2\dfrac{\partial u}{\partial x}+r_2v=0, \quad t>0, \quad x\in\partial\mathbf{R}^m \\ \text{初值}: u(0,x)=u_0(x), \quad v(0,x)=v_0(x), \quad t>0, \quad x\in\partial\mathbf{R}^m \end{cases} \tag{4.11}$$

（左端第二项为扩张项，右端 f,g 为反应项，∂ 为边缘算子）．但由于 v 中不考虑其信息载体，所以可认为 v 没有能动性，因此认为扩散反应机制仅在 u 内进行，于是这时模型可简化为

$$\begin{cases} u_t+a_1\nabla^2u=f(x,t,u,v) \quad (\text{条件同(4.11), 免记}) \\ \text{边值}: r_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+r_1u=0 \\ \text{初值}: u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{4.11$'$}$$

此外，既然是场的相互作用也可参照麦克斯韦方程，取模型的基本形式为

$$\begin{cases} u_t+a_1\nabla^2v=f(x,t,u,v), \quad x\in\mathbf{R}^m & (1) \\ v_t+a_2\nabla^2u=g(x,t,u,v) & (2) \\ & (3) \\ \text{边值}: \begin{cases} \operatorname{div} u=0, \\ \operatorname{div} v=0, \end{cases} t>0, \quad x\in\partial\mathbf{R}^m & (4) \end{cases}$$

① 有兴趣者可参见《常微分方程几何理论与分支问题》，张锦炎著．

并同样出于(4.11)′的考虑，可仅取方程（1）、（3）作为我们的模型（注：鉴于模型的近似性，描述同一对象的模型应具有非唯一性，这点也体现在这里了）.

对于该两类模型（偏微分方程初边值问题或边值问题），具体求解较难，但数学已能判定其解的存在唯一性．特别已能判定在较平凡的条件下，当$t\to\infty$，其解将收敛到均衡状态．此即E中u,v达到的新的自组织均衡（对环境的适应）状态.

3．两个完全空间的相互作用例

上面讲到的完全系统$E=(u,v)$中，未考虑环境信息v的载体，现在若考虑了v的载体，并简化地考虑为“一个”载体，则问题即化为**两个完全系统**间的作用.显然它们是通过各自的对偶（虚）空间彼此作用的．这类问题和现象在科技生活中是常见的，比如电磁感应即是两场间的相互作用；博弈竞争、比赛也是这类问题．这时若竞赛双方差距较大，则表现为各自的“核”间对抗；若势均力敌，则表现为各自的对偶象（场）间的比较，诸如所谓“靠心理取胜”、“靠气势压住对方”或说“靠运气取胜”皆属后一情形.在世界级决赛中即经常表现为后一情形.又如医学上有一统计报告称“生活在一起的女性，其经期将趋于同步”（载于《20世纪的23项突破》，有中译本），显然这也属于我们这里提出的问题．特别地，我们来看看：

例 15　相邻单摆能趋于同步问题的讨论.

在惠更斯时期，一钟表匠偶然发现两个挂钟放在一起时，它们总要趋向同步摆动．后来科学进一步发现，任两系统间，只要有这种**频率竞争**就都将趋向一个**可公度的运动**——频率比趋于有理数，且把这种运动轨道叫做**锁相轨道**（phase locking），并找出了相应的模型表述，即微分方程

$$\alpha\ddot{\theta}+\beta\dot{\theta}+r\sin\theta=A+B\cos\omega t$$

只是对该类方程的解的讨论比较复杂，直到现代还未成熟，我国学者对此也有研究.

现在让我们仍回到单摆，以一种简单方式对其作定性认识．首先，根据单摆运动方程可有两单摆的运动方程组

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-\sqrt{\dfrac{l_1}{m_1}}\alpha_1 x_1\\[2ex]\ddot{x}_2=-\sqrt{\dfrac{l_2}{m_2}}\alpha_2 x_2\end{cases}$$

其中x,m,l含义自明，这里只是多了α_1,α_2，它们分别表摆锤（质量为m_1,m_2）在摆动时所产生的“场”的相互作用系数（一种当量）．这是因为考虑到相邻两钟只

能通过这种“场”来作用（即认为其中有因两摆在运动中距离改变所引起的引力场改变所起到的作用），同时它是一种弱的持续作用，所以α_1,α_2应该是一种小参量，而且分别还是其间距离和质量m_1或m_2的函数，同时m愈大，α也愈大.

这时比如对前式（二阶线性微分方程）可有其特征方程

$$\lambda^2=-\sqrt{\frac{l_1}{m_1}}\alpha_1$$

即$\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\alpha_1\sqrt{\frac{l_1}{m_1}}}$，得到通解

$$x_1=C_1\cos\sqrt{\alpha_1\sqrt{\frac{l_1}{m_1}}}t+C_2\sin\sqrt{\alpha_1\sqrt{\frac{l_1}{m_1}}}t \qquad （C_1，C_2 为任意常数）$$

同理，对第二个方程，有

$$x_2=C_1'\cos\sqrt{\alpha_2\sqrt{\frac{l_2}{m_2}}}t+C_2'\sin\sqrt{\alpha_2\sqrt{\frac{l_2}{m_2}}}t \qquad （C_1'，C_2' 为任意常数）$$

其中$\sqrt{\alpha_1\sqrt{\frac{l_1}{m_1}}},\sqrt{\alpha_2\sqrt{\frac{l_2}{m_2}}}$分别为它们的摆动频率.

那么它们的频率可不可能变得相同呢？这就是是否有

$$\sqrt{\alpha_1\sqrt{\frac{l_1}{m_1}}}=\sqrt{\alpha_2\sqrt{\frac{l_2}{m_2}}}$$

的问题．由于α与相应的m是正比关系，同时α是小参数，可看做$\sqrt{m}$级别的，这一来该等式即是可能的了．亦即从定性看它至少不含矛盾，这从又一个方面解释了相邻单摆趋于同步的可能性.

附记：这里顺便再提出一些生活中广为存在的二象系统作用效果实例，也许值得欣赏．比如人类白细胞平均值（即正常值）在很快上升，几十年内即增加了上千个单位，显然是人类对迅速污染的环境适应的效果反应；又如传染病医院医生少患传染病，为什么？据医生自己说并不因为他们重视了消毒，而是环境对他们起了“疫苗”作用；生活苦的人身体“贱”，生活优裕的人身体“娇”，过分讲卫生的人身体反而不好(据说歌星邓丽君是个“洁癖”,但40岁即殁于一场感冒．又日本人爱洁如命，视“脏”如“罪”，是世界最讲卫生的民族，却被列为“抵抗力排行榜”倒数第一)；又有资料说，战争期间女人生的男孩多于女孩．同时，从大

的范围来讲，比如一个民族的文化、风俗的形成以及古今共识的“近朱者赤、近墨者黑”定律都说明了这类现象，它在生活中可算比比皆是，举不胜举. 这并非偶然，原来皆出自一种亘古皆有的“二象对偶”原理.

四、对“软科学时代”说的认识

最后作为一个应用例，我们来认识一下，人们把现代科学的一大特征叫做“进入了软科学时代”，这是为什么?

首先，我们说它表明科学界和整个社会已广为接受事物的“软、硬”二象结构观点.

其次，是因为科学进入现代以来，自然科学和工程技术科学这样的“硬”科学与社会科学这样的“软”科学间形成的边沿科学、综合学科蓬勃兴起，诸如系统科学、管理科学以及软科学、运筹学等，显示出了硬科学与软科学的相互渗透、相互结合特征.

再则，科学进入现代以来，“硬科学”本身也纷纷进入哲学的或数学的抽象研究阶段. 比如计算机科学的软象强于硬象、理论物理进入哲学与数学研究的现状等都表明了这点. 即使生物学也如此. 又如机械业发展起了柔性加工以及建筑业考虑“以柔克刚”、“软性防震”如此等等也都表明，科学进入现代，各学科都开始了它的软性这一面的研究.

尚需说明的是，称现代进入了“软科学时代”并非只重视软的研究，亦非这时科学都变得只有软象了. 首先应该看到一切科学包括所谓硬科学皆与一切事物一样，从来都有着“二象”合成的完全空间结构，只是不同的事物在不同的发展阶段，其二象间的比重不同而已. 所谓“硬科学”莫非是它的软象弱于硬象，以致可以忽略其软象. 那么现在则是在原有二象间加大了对其软象的重视程度，加大了软象的比重，注意到了同时从“软、硬”二象去研究，有利于新的突破.

所以，所谓“软科学时代”特征充分体现了本节的“完全系统”观点. 从而，本节的“完全系统”观点是能更好地认识当前这一时代特征的.

第四节 “系统学二象论”概述

本章前三节中在认识数学的同时，也算是从“数学”角度引出了有关“二象系统”概念的一些相关认识. 本节则直接从“系统学”角度给出“系统二象”概念及其相关理论简述. 目的是为了让读者能尽早树立“二象”意识，以便用此更

高视觉去认识以后各章内容，并将在此基础上进一步总结性地（对整个数学）给出“数学的‘二象’机制揭示”这一章.

具体说，从“二象”角度看，前三节的逻辑结构是：通过对《线性泛函》中线性空间 X 的“对偶空间” X^* 认识，推广至一般空间（仍记为 X）及其对偶空间（ X^* ）的认识（第一节）. 进一步提升到一般系统的“二象”性，并从数、理、哲和社会等多方面作出“二象”认识（第二节）. 最后提出并讨论了“完全系统” (X,X^*)（第三节）.

那么，本节拟在上述认识基础上，直接从系统科学出发，基于近著《系统学二象论》基本精神，正面谈谈“二象系统”概念及其相关理论.

一、问题的引入

已知系统科学诞生以来对其“系统”定义（描述性定义）有过数十种之多，但至今没有一种定义得到流行. 究其原因主要在于它们多是些直观描述，缺乏深度思考、缺乏本质揭示.

我们在几十年的系统科学研究与应用中，经多次修改终于形成一套自认为较成功的定义（见“二”）. 这里事先交代一下其基本思路也许不无裨益.

我们认为人们通常的分析特征是“平面”式的，诸如条条、块块、分割、纵横、网络、扩张、移植、线索、外延等术语，都在一定程度上具备着这一思维模式，可把它叫做“平面思维”. 虽然也时有所谓升华、深入、层次等“竖向性”术语，但由于没有上升到“意识”和“悟”的层次上来，思维仍然是压抑的、附着在平面上的，未能爽朗地作为一维“竖向空间”来展开.

把在“平面思维”基础上作竖向（垂直）地向上升华、提升、抽象和（垂直）向下的深入、深刻、细分等思维特征叫做“竖向思维”. 应该明确领悟到“竖向思维”与“平面思维”之间有质的差异.

当然，正常的思维应该是：“平面思维” + “竖向思维”. 本着本段任务下面着重从“竖向”角度深入.

带着这里“竖向”的抽象意识，我们则明显地感觉到“系统”定义中不能忽视其虚的、软的（原来被认为次要的）一面. 正如说一幢房子不能只说是砖构成的，尚不能忽视其砂浆.

这时，再来观察诸多“系统”定义时发现，一般都仅把注意力放到系统的“元素”（实在面）上了，对其元素间的“关系”（虚拟面）往往并不经意，或者轻描淡写，或者一言掠过. 可看出定义者心中并没有“虚、软”这一面的明确位置. 由此，我们逐步形成了“系统”的（下段）“二象”定义.

换言之，我们的“突破”仅仅在于把别人放在桌下的东西（虚拟面）明确放到桌面上来而已，别无它哉．但是，它给笔者思想上的武装却是我们急于想分享给读者的．

二、概念介绍

定义 4.6（直观定义） 任一对象，当我们认为它有内容时，就是个**系统**．

定义 4.7（科学定义） 系统（S）是个“三元组”，记为

$$S=(\text{目标；元素，关系})\triangleq(Y;X,F)$$

意即，系统是由目标、元素和关系三部分构成的整体，叙述为**“系统的元素 X 为着共同的目标 Y 而发生着关系 F”．**

这一来，“系统”可形式化为

$$S:y=f(x,a),\ y\in Y,\ x\in X,\ a\in X^{*},\ f(\cdot,a)\in F$$

可见通常把任一数学表达式叫做“系统”是十分恰当的．（其实，定义 4.7 在第三章“第一节、二，例 2”中也见到过．）

定义 4.8（二象系统） 任一系统都是由满足如下诸性质的两个方面构成的，这时把它叫做**二象系统**，把它的两个方面叫做**二象**．从二象角度对系统的研究叫做**系统二象论**或**系统学二象论**，简称**二象论**．

性质 1 二象系统的“二象”表现为，一虚一实，或叫一软一硬，分别叫做实象空间（简称实象）、虚象空间（简称虚象）．

性质 2 二象间同生同灭，犹如一张纸的两面，互相依存，彼此映照．

性质 3 二象间具有“空间性”实质差异．

首先是它们没有一一对应关系．其次是虚象空间中任一元皆系实象整体的某种（一般是泛函）映射．再则是虚象乃实象的升华与抽象，二象间居于“竖向”上的层次关系．

性质 4 二象间具有“对偶”关系，即（同时地）“既对立又统一”关系，是“对立给系统以动力；统一给系统以进步”．

性质 5 二象间具有“互动”机制，即任一象的任一改变都将内在地引起其另一象的相应改变．

性质 6 二象间具有“互补”关系，即任一象的缺失或缺少都将造成系统的“破缺”

性质 7 二象间具有“适当”的“权重”比，即若记为

$$X:X^{*}=r\in(a-\delta,a+\delta)$$

则δ适当小，$0<a\leqslant 1$，且a,δ随系统而定.

性质 8 系统的二象结构是个“分形”式的多层结构．最基本的是（单层）“二象”，每一象又是个二象结构，如此下去．具体“层数”随系统研究深入的需要而定.

定义 4.9（系统学） 系统科学中的（对系统整体做本原性研究的）基础理论分支学科，叫做“系统学”.

那么，“二象论”则是系统学的一个分支学科，所以也叫做“系统学二象论”.

定义 4.10（不完全二象系统） 当系统二象间不完全满足诸性质，特别是性质 4、性质 5、性质 6 时，叫做“不完全二象系统”.

定义 4.11（复合二象系统） 当一个系统系由多个“不完全二象”结构互相迭合成为“完全二象”结构时，叫做“复合二象系统”.

复杂系统常常是“复合二象”的，比如大企业机构的董事、经理、工会等“三权鼎立”机制；国家机构的“人大、政府、政法”结构；政法系统的“公、检、法”结构等，乃至东方哲学中对自然系统的“五行”说等皆如此.

闲言一则：近日在网上偶见有人在谈到光的“波粒”二象性时仍然感到对“二象”性的承认（从“意识”层次看）还没有到位，总在强调“波”和“粒”的对立一面．本质上说来还是脑子里的空间概念和空间意识还没有得到很好升华之故，其实多作一点研究性思考即会突破这种意识障碍的.

三、理论概述

（1）学界共识：现代提出的任一理论，皆可在历史上找到前人的足迹．“二象论”更可以在几乎各个学科中找到前人的“足迹”．那么，“现代提出的理论”，其意义就应该表现在它的“时代高度”上.

我们认为这一“时代高度”应该体现为：一要充分站在现代科学基础上来提出它；二要充分运用现代科学工具来研究它；三要能让“二象论”充分体现现代科学水平；四要能让“二象论”、“二象思维”、“二象观”成为（大）科学界的共同工具和公共修养.

（2）《系统学二象论》仅仅给出了概念和一部分理论框架，还是一片新领地.

一方面是研究的“手段”问题，这需要从“数理”和“哲学”两个方面同时进行．因为它属于系统学——要求全面研究系统，这时仅靠数理手段是完不成任务的，还必须用哲学来解决系统的“完全空间”减去“数理领域”后的“余空间”问题.

另一方面是研究的“内容”问题，可扼要地将其归为如下八个方面：

① 诸“定义”之间的关系需要探讨.

② 诸“空间”的结构值得研究. 比如目标空间、虚象空间、元素空间本身的空间结构需要研究，同时，相互之间的关系也需要研究.

③ “二象系统”的每一条性质都是一个理论，需要探讨也值得探讨. 比如二象间“对偶”、“互动”及其“柔性”的数理探讨，也许是颇具吸引力的.

④ 系统二象的“复合”结构与“多层”结构等，特别在结合到实践中复杂系统应用时，大有研究任务.

⑤ 进一步的理论探讨问题，如“竞争”、“博弈”中的“二象性”分析.

⑥“二象思维”的研究，如“竖向思维法”的建立等即是.

⑦“二象论”的应用研究，这更是一大领域.

⑧ 特别地，以上是用数学去研究二象系统，显然也需要反过来以“二象观”、“二象论”为工具和武装，去研究数学.

作为“概述”，这里仅示意性地指出上述一些方向，进一步的待见第十二章“数学的二象机制揭示”.

第五章　数学的逻辑范畴认识

也许我们都曾发过问，为什么人类遵循着同一思维逻辑？思维逻辑究竟是什么？如果说思维是客观世界的反映，那么这个“客观世界”指的是什么？思维是如何“反映”它的？思维为什么能“能动”地推理？数学属哪一逻辑范畴？这些也都是本章所要认识和回答的.

本章将首先沿着逻辑学的发展主脉，按照本书的起码要求，回顾一下几个阶段性的逻辑分支，并认识一下它们间的关系，然后提出我们对形式逻辑背景空间的一个猜测性认识，最后提出一个**数学逻辑**概念，并认识它的逻辑范畴.

第一节　逻辑学概述

相信吗，一个没有学过逻辑学的人甚至一个文盲，他的行为和语言可能非常合逻辑，仅仅是词汇贫乏一点或引经据典的少一些罢了. 这是为什么？原来逻辑就是思维规律，思维规律是伴随着人类进化而来的，本原地存在于每个正常人的思维活动中. 那么是否可说因此就无须研究逻辑学了呢？否，所谓逻辑学系研究**思维形式、思维规律、思维方法**的学科，简称为研究逻辑规律的科学. 由于思维中的“逻辑现象”本身也是一种客观存在，也有着丰富的客观规律藏在其中，需要揭示出来，正如自然科学需要揭示自然的规律一样. 因此，逻辑学也是一门科学，需要研究它.

为什么要学逻辑学？① 逻辑规律能指导我们深入地思维，比如参加辩论和科学研究等，当然也能使语言尚不太合逻辑的人变得好一些. ② 更主要的是，逻辑是科学的基本前提、基本手段和试金石，可用它对一个人的语言、一篇论文、一个科学结论等作出基本判断. 比如一门新学科如果能在“逻辑学”上占有一定的地位，常常即容易被承认为新的基础学科，比如不确定性数学（概率、模糊）即在“排中律”上体现了它的特征，因而具有基础学科的地位.

为什么人们容易感到逻辑学很枯燥？也许是因为它既平凡又抽象的缘故. 所谓“平凡”是认为逻辑就在自己的脑子里，似乎不学习也可以. 特别是未成年的、

尚未走出校门的学生，没有感受到加强自身逻辑修养的迫切性，容易感到枯燥.所谓“抽象”就是它的空间感、实在感不强，似乎只是平常语言的分拆，且生僻术语太多，诸如假言、选言、联言、主项、谓项、三段论、周延性等，不容易在人们脑子里建立起空间概念.这对于人类多数是“空间思维”的特征来说，的确不太适应.

本章不在乎语句的细分，仅在于宏观的考察.据此要问，逻辑学的学科结构如何？虽然逻辑学历史十分悠久，与哲学同源，一直是哲学中两大主流性学科（逻辑学、心理学）之一，而且即使今天逻辑学已有越来越多的学科分支，但其主要学科仍然只有两门，那就是形式逻辑和辩证逻辑，其中又以形式逻辑作为主流学科.

既然“逻辑”是对思维规律的泛称，那么“逻辑学”含义是什么？显然“逻辑学”应该是所有（研究思维规律的）逻辑学科分支的总称，因而逻辑学应该随着人类对思维规律认识的深化、扩展而发展.的确，在19世纪以前，逻辑仅指形式逻辑，因为那时只有形式逻辑学.不过在19世纪正式产生了辩证逻辑以后直到今天，虽然发展起了很多逻辑学理论分支和更多的应用分支，但由于主体学科只是形式逻辑和辩证逻辑，所以今天说到“逻辑”，仍然仅表形式逻辑与辩证逻辑，甚至仅表形式逻辑.这不是为了别的，只是表明形式逻辑在整个逻辑科学体系中的重要地位.总之，“逻辑学”概念既有其广泛性又有其特殊性.

逻辑学与思维科学的关系如何？思维科学是20世纪80年代初创立的(中国，钱学森)，其任务是探索整个精神现象的规律、机理和本原.它是多门学科的交叉，它需要综合运用生物学、生命科学、实验科学和哲学、社会学等来研究思维规律.这里所讲的思维规律研究正是与逻辑学紧密相关的，不过它们仅具有互补性而无相互替代性.比如，思维概念在思维科学中即得到了推广（包括直觉、灵感、省悟等所有精神现象).显然，思维科学的发展将必然影响到逻辑学范畴的扩展[①].

第二节　形式逻辑与符号逻辑

一、基本概念和特征

形式逻辑就是“形式逻辑学”，又叫一般逻辑、基本逻辑、传统逻辑.如前所述，也可直接简称为逻辑思维、思维逻辑或“逻辑学”.这是因为不管从历史的长河还是现今发展的规模来看，形式逻辑都绝对居于逻辑学的主体位置、主流学

① 进一步,请参见拙著《思维科学引论》.西南交通大学出版社，2004年.

科．实际上如今的逻辑学分支中除了辩证逻辑等少数分支外，皆属形式逻辑分支出来或说派生出来的，因而也称形式逻辑为逻辑学的“母学科”．

形式逻辑研究人类凭其意识能察觉出来或能描述出过程来的那部分思维活动．具体说它研究思维的“形式结构”、“内在规律”和基本方法．

形式逻辑学属“发现型学科”，而非创造型学科．而且就在我们的思维活动中去发现，用我们自己的思维去发现我们自己的思维．也许这时我们会联想到“理发师悖论”．的确这时的研究并非易事，恰好是更难（有兴趣者，请继续思考）．

形式逻辑的特征首先是“概念化”，然后在概念基础上提出命题、进行推理、判断，也包括证明、辩论等活动．容易发现，实际上这些思维活动也就构成了人类基本的思维活动，包括社会生活和科技活动中的基本思维活动．此外便是灵感、创造、省悟之类的高级思维活动了．

形式逻辑的思维是在脑内进行的，有个明显的“脑内反映”．这个反映的机制①就是大脑的“概念化机能”．这个概念化“机能”能产生一种映射，把客观事物“能动地”②映到大脑，从而形成一个概念．这时的“概念”是已经脱离了原象的、被“升华”了的脑内模式，或叫脑内信息．这时的概念化机制就好比应用数学中模型化（建模）过程，或比做计算机的程序化过程．

注意到“概念化”也是整个科学研究的基本前提，只是随着科学的进步，这种概念化可能表现为更加先进的形式与模式罢了．

二、形式逻辑的基本内容

逻辑是思维，思维以语言来表达，所以逻辑学以语言的分拆和分析为基本任务．但归结起来可以说，形式逻辑的基本内容就是研究思维的**形式**、思维的**规律**和思维的**方法**．这里的讨论仅限于这一层次，具体说有：

1．思维形式的研究

思维形式系指概念、命题、推理、判断，乃至证明、辩论等，因此对思维形式的研究就是在这些方面分别进行的深入研究．当然一般形式逻辑对这些内容的研究仍然是采取首先概念化，然后推理、判断、论证、答辩的方式，同时采用现象观察、直观认识和白话描述的手段，不过这些手段是既欠严密又还难以深入的．

形式逻辑对思维形式的研究是其主要内容，比如，在研究概念时又提出了外延、内涵、同一、属种、交叉等，使概念继续深入；研究推理时又从演绎、归纳、

①“机制”系指一种具有内在动力的系统功能．

②“能动”是个哲学术语，含义十分丰富，请读者品味．

类比、假说、证明、辩驳等方面去继续展开；研究判断时，又沿着性质、关系、联言、选言、假言、模态等术语去深入．如果说数学是在玩符号游戏，那么可以说形式逻辑在玩概念游戏．的确在经典的哲学家那里似乎语言辞藻总不够用，常常不得不把一些词汇重作排列组合以产生新概念、新术语，这究竟是思维的精细还是思维空间的狭窄呢？值得思考．

2．思维规律的研究

思维规律可以由形式逻辑的基本定律来表示，这就是同一律、排中律、矛盾律和充足理由律等“四律”．

同一律指思维过程中，对象（问题）不变、概念不变．

排中律要求思维的前提条件和思维过程都要防止模棱两可，保持明确清晰的思路．

矛盾律实为“不矛盾律”，系指整个思维过程或其中任一阶段皆不能产生前后矛盾现象，也包括不能产生循环论证现象．

充足理由律是针对证明、辩论的思维规律提出来的．显然它也在于保证思维结果、推理结论的唯一性和准确性．严格说来是，充足理由律与排中律的结合保证了思维结论的唯一性；充足理由律与矛盾律的结合保证了结论的准确性．

人们在课本的习题中常常遇到所谓“需要讨论”的问题即属不满足充足理由律的形式．这时需要补充条件才能得到唯一确切的、满足充足理由律的答案．

例　若说“求一个点 x 使它满足方程 $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$”，则这时它不满足充足理由律，因为满足方程的 x（解）有两个：$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．但若说“在［0,1］区间上找一分点 x，使之全段与长段之比等于长段与短段之比”，则理由充足，于是只有一个解了，即 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$（黄金分割）．

一般说，对于需要补充条件才能得到确切结论的问题，视其补充的条件不同，相应结论也会不同．所谓“讨论式问题”在科研实践中经常出现．

总之，四律中，前三律是针对思维过程提出来的约束，而第四律则是在前三律基础上为保证结果的准确性而对前提条件提出的要求．

还要指出，四律一经提出，既是用来指导思维的，也是用来约束、规范思维的，同时也是用以检验、鉴别思维的．但四律不是人为制定的，而是从人类共同的思维特征中观察、整理、总结出来的，所以叫做（四条）“定律”．

关于“四律”间的关系，将在第五节作进一步讨论．

3．思维方法的研究

人类的思维方法十分丰富，难以概括，总的可分作高级方法（即辩证思维方法，见后面）、初级方法（即形式逻辑方法）．在形式逻辑中思维方法又分为若干层次和类别．比如仅其中通用的、基本的思维方法，也有诸如归纳法、比较法、分析综合法等．此外，如发散思维、逆向思维、幅辏思维等几十种思维方法，则属于更基层的方法，不容细述了．

总之，本节所述基本内容皆属形式逻辑的经典内容，虽然对这些内容的研究可说至今未息，但也无恙于说一般形式逻辑研究已经基本成熟．

三、形式逻辑的发展现状

已说过，形式逻辑是与哲学同源的，因而历史悠久、肇源甚古．逻辑一词即来自德谟克里特（希，公元前 540—470 年）的《论自然》一著．形式逻辑的基本内容在亚里士多德（希，公元前 384—322 年）已经得到研究，比如同一律、矛盾律、排中律就是他最先提出的．他在《工具论》中对概念、判断和推理、证明等逻辑形式也已提及．特别对于"推理"还提出了一度有名的"三段论"格式．所以说公元前 5～3 世纪是形式逻辑发展的第一个高速期．

形式逻辑发展的第二个高速期是从 17 世纪开始直到现代．此期内主要人物有五位．首先是数学家兼哲学家**莱布尼茨**（德，1646—1716 年），他在思维形式中加入了证明和辩论，并在思维规律中加入了"充足理由律"，使之成为完善的"四律"．同时他还以代数演绎形式给出了现代数理逻辑的一个古典形式．接着是**康德**（德，1724—1804 年）提出了辩证逻辑概念，并由**黑格尔**（德，1770—1831 年）巩固和发展，最后由**马克思**（德，1818—1883 年）正式建立学科，**恩格斯**正式定名．

此期内的主要成就首先是形式逻辑进入现代形式逻辑时期，其次才是辩证逻辑的产生．形式逻辑在此期内的发展状态可从两个方面看到．

（1）研究领域上的发展．

这表现为学科分支的不断发展，主要有布尔接替莱布尼茨思想创立的布尔逻辑；黑格尔、马克思创立的辩证逻辑；罗素等人于 19 世纪末 20 世纪初创建的现代数理逻辑，以及 20 世纪内先后产生的制约逻辑、模态逻辑、多值逻辑和辩证数理逻辑等．至于直接作为数理逻辑分支的模型论（20 世纪 50 年代）、证明论、公理集合论、递归论、非标准分析（20 世纪 60 年代）等，以及种种应用性分支，这里就不必提及了．

不过在越来越多的逻辑学科分支体系中，仍以形式逻辑学的发展作为主脉，其次便是辩证逻辑学．我们的介绍也仅在这些主要学科上．

（2）研究手段上的进步．

这方面进步的脚迹主要表现为，从古典的“概念化”发展为近代的“符号化”，再演变成现代的“形式化”这样“三大步”．

要知道每一步都是其前一步的发展和进化，而不是否定，因此三步之根本基础仍然是概念化．

这种进化的动力在于：当哲学（包括逻辑学）在近代自然科学的促进下迅猛发展时，深感那种古典的口语、白话表述的推理过程常常不准确，容易引起一些不必要的争论；看到了它越来越不适应学科深入发展的需求，于是在形势逼迫下，形式逻辑进入到了“符号逻辑”层次．

四、符号逻辑的产生

1．符号逻辑的产生

符号逻辑又叫做“现代形式逻辑”．从认识过程看，它经由如下两个步骤而产生．

（1）语言转向．

当逻辑学家们认识到过去形式逻辑的弱点在于语言表述上的缺陷时，便自然地产生了改变语言形式的要求，叫做“语言转向”要求．

语言转向何处？由于当时的数学已进入高等数学时期，符号化和精确化是它的明显特征，加上当时许多哲学家、逻辑学家本身就是数学家[①]，所以他们意识到为了精确化，就需要符号化．

（2）符号化．

顾名思义，符号化即采用一套符号体系及其组合成的“语句”、“公式”等，加上一些必要的白话叙述，以完全代替经典形式逻辑的完全白话式的推理方式．

2．符号逻辑的类型

符号逻辑有两种类型．

（1）以保持传统形式逻辑特征为其特色的符号逻辑，因此它仅限于语言的符号表征．但显然不能以此形式作推演，而不得不仍然用传统的思辨方式作推理．因

---

① 在古代，数、理、哲本是一家，常常一个学者身上同时兼有三种特征、两种特征，可惜愈往现代这种现象愈少了，也许不仅是因为学科的深化，不能不说也是与教学体制和人们的意识有关．须知，时代越往后越需要“直接把哲学装入每个科学家的脑子里去”．

此不能从根本上改变传统形式逻辑的弱点，所以它的生命力不强，仅仅表现为已有的形式逻辑的现代表现形式，而不可能专门形成先进的学科．

（2）以充分运用和发展数学的表现特征为特色的符号逻辑．这就是下节将介绍的“数理逻辑”，它不仅采用符号化手段，而且采用了公理化、形式化手段，这就真正能用数学方式进行推理论证了．

第三节　数理逻辑学简要认识

一、简要回顾

已经谈到，数理逻辑思想萌发于莱布尼茨用**代数演绎**来表述形式逻辑，后来为布尔发展成**布尔逻辑**（1847 年）．它对于电气和计算机理论十分有用，也是数理逻辑的前身．以后则是弗兰克尔、佩亚诺、罗素等人开创的现代数理逻辑学（1894 年），简称“数理逻辑”，又叫“数学哲学”．

数理逻辑的发展可归为三个阶段：**第一阶段**是 1894—1930 年，为激进时期．此期内受逻辑主义的影响较大，主要是罗素的《数学原理》致力于“把数学还原为逻辑学”，亦即要使

$$\text{整个数学} \subset \text{数理逻辑}$$

他认为“数学就是所有形如‘p 蕴含 q’的命题集，这里 p,q 都含相同数目的一元或多元命题．”因此他企图在其“类”和“关系”概念下，通过演算推出“自然数系”和算术，乃至整个数学，直至发现了悖论才罢休了．

数理逻辑发展的**第二阶段**是 1930—1965 年，由哥德尔“**不完全定理**”使之走上了正常发展道路．其特点是回避悖论，用“无限形式”探索数学的“真正基础”，由此产生了“数学哲学”这一深刻的数学前沿学科．

数理逻辑发展的**第三阶段**起自 1965 年，也可说是数理逻辑的旁系发展时期．系由扎德提出的“模糊数学”加上计算机科学的刺激，产生了以“模糊逻辑”为核心的“多值逻辑”的迅速发展．

二、基本特征

（1）数理逻辑与早期数理逻辑（布尔逻辑）有着质的差异，即使在数学内它们也属于完全不同的学科类型．布尔逻辑典型地属于代数类型，数理逻辑则是独

立的学科类型.

(2) 可以说激进时期 (20 世纪初) 的数理逻辑是逻辑主义学派的，而 1930 年以来的数理逻辑则属于整个数学，受到公共的支持，对它的发展是整个数学界关注的任务.

(3) 近一个世纪以来数理逻辑的发展已使人们承认，“数学是建立在‘数理逻辑’与‘集合论’两块基石上的”;“数学理论源于逻辑公理系统的相互作用”. 因此数理逻辑已成为一门典型的“基础数学”学科.

(4) 如果说数学是从已有概念和结论推出新的结论，则数理逻辑是根据某些“基本事实”和自己的“逻辑演算”推出数学上有用的“基本结论”. 因此说数学有着更为广阔的背景天地，而数理逻辑则只能在其内在空间里进行.

(5) 数理逻辑使数学不断触及到它的“边缘”，因此既显得深奥、枯燥，又容易出现悖论、怪圈.

三、主要分支

已有的数理逻辑 (或叫数学哲学) 分支主要有五个:

(1) 证明论.

证明论又叫元数学，1893 年由弗兰克尔创立，后为希尔伯特所发展，旨在证明数学的“相容性”. 最初试图用有限步来完成; 后为哥德尔“不完全定理”所破，改为无穷步证明，并用上甘岑的“超穷归纳法”. 然而至今仍未实现目标.

(2) 递归论.

递归论产生于 1930 年代，由丘奇、哥德尔、图灵等所创，致力于探讨数学中用有限步可获得精确结果的所谓“有效可计算问题”，因此属于所谓“硬数学”. 称有效可计算函数为递归函数，有名的形如

$$\begin{cases} f(0)=x_0 \\ f(x_{n+1})=g[n\cdot f(x_n)] \end{cases}$$

的“计算复杂性问题 (又叫判定问题)”即属此领域.

(3) 模型论.

模型论产生于 1950 年代，旨在人为地构筑“模型”，以检验或解释数理逻辑中某种或某组语句 (结论) 的真伪.

模型论是比较深奥的一个分支，它对数学的贡献也不小.

须指出，这里的“模型论”与应用数学中的“数学建模”不能混淆，尽管两者中“模型”一词的概念完全相同，但其对象、适用范围和目的任务皆完全不

同．最起码的差别是：一个属纯数学中数理逻辑的一个下属理论分支；另一个则是应用数学中一个方法性分支学科（参见拙著《数学建模基础理论》）．

（4）公理集合论．

这是继罗素悖论和哥德尔定理之后，在数理逻辑中产生的一个新分支．其宗旨是要在回避悖论的前提下证明康托尔的连续统猜测，也是为了使“集合论”本身形成完整的理论体系．不过至今它离目标还远．

（5）非标准分析．

它在 1965 年发祥于模型论，如今已发展成数理逻辑的一个分支学科．进一步地将在第十一章谈到．

四、基本内容

这里仅列出数理逻辑学中最基本的一些符号和术语，以资掠见其基本内容．

（1）原子符号：

连词：$\neg$（非），$\wedge$（与），$\vee$（或），$\Rightarrow$（蕴含），$\Leftrightarrow$（等价）

变词：可数多个符号，如 $x,y,z\cdots$

附加常词：一组符号，通常是取用于英（或希）文词语的第一个字母

量词：$\forall$（全称），$\exists$（存在）

括号：[,]，(,)，用以对公式分组

关系符号：$\in$（是…的一元），$=$（等集），S（　　），R（　　）等

（2）原子公式：如 $x\in a$，$b=y$，$x=z$ 等最简单的关系式．

（3）公式：有限次使用形式语言将原子公式连成的形式叫做公式．

例 2　设 φ,ϕ 是原子公式，则如 $\neg\varphi$，$[\varphi\vee\phi]$ 等即为公式．

（4）量词的辖域：设 φ 为公式，则形如公式 $(\forall x)\varphi$ 或 $(\exists x)\varphi$ 中的 φ 为相应量词的辖域．

（5）语句：若公式 $(\forall x)\varphi$ 或 $(\exists x)\varphi$ 中变词 x 在量词 $(\forall x)$ 或 $(\exists x)$ 的辖域 φ 中，则 x 称为**约束变词**，否则叫**自由变词**．当 φ 中每个变词皆为约束变词时，φ 叫做**语句**，否则只要有一个变词为自由变词，φ 就叫做**谓词**．

例 3　$(\forall x)[V(x)]$ 为一“语句”，且是有界语句，但 $(\forall x)[V(x)]\wedge[W(x)]$ 不是语句．因为公式 $W(x)$ 不属辖域，所以其中 x 为自由变词，这时称它为“谓词”①．

（6）系列基本概念．诸如解释映射、滤集、超滤集、转换原理、前束范式等皆是．

---

① 概念参见《现代无穷小分析导引》，徐利治等，1990 年．

(7) 数理逻辑研究：命题逻辑（又叫命题演算），谓词逻辑（又叫谓词演算）.

(8) 数理逻辑学定义：从各种演算和基本概念出发可推出定理、性质，再由此推出新的定理、性质，如此繁衍下去，这一包括条件、过程和结论的丰富而自恰的整体，叫做**数理逻辑学**.

第四节　形式逻辑的本质认识

一个流行的说法是，“逻辑思维是客观世界规律的反映”. 那么人为什么能思维？思维为什么正好能反映客观世界规律？今天在现代科学的基础上终于能认识到它们的深刻、奇妙性了. 比如我们现在即可进一步来认识一下，这个“客观世界”的范畴是什么？它为什么会有这样的逻辑规律？思维又为什么能反映出这一规律以及为什么会产生错误思维？等，归结起来就是形式逻辑的本质问题认识.

我们总的结论是：**思维反映出的形式逻辑是且仅是物质宇宙的运动和运动生成的属性**. 现分步来讲.

一、思维形式再认识

易看到，在思维形式的“推理、判断、证明、辩论”四个概念中有一个共同的实质，那就是都有一个“过程”. 而且这一过程是由问题本身决定了的，具有确定的途径，只是各自的特征不同罢了. 比如**证明**属于先有了结论（又叫目标），然后去找出起点（依据），使之沿着一个由它决定的路子（推理过程）达到目的的情形；**推理**则是先有了起点（条件），然后沿此条件所决定的路子（逻辑推理过程）推下去，得到的是什么结论就是什么终点；**判断**则是强调推理结果是否合符已有的标准；**辩论**本是一个十分复杂的事物，可说是集中了人（辩论者）的一切思维特征与思维能力，不过这里自然仅指通过推理去判断对方观点的错误、解释我方观点正确的这样一个过程.

二、思维规律（四律）认识

1. “四律”中前三律——同一律、排中律、矛盾律，是不独立的

比如，如果同一律不成立，则可能产生违背排中律或矛盾律的情形. 此时只要在推理途中把条件或概念作适当改变，哪怕是“偷梁换柱”地隐蔽进行，都可能做到这点. 又如不满足排中律，则可能违背矛盾律. 例如，由于受害者向警察

诉说的罪犯形象模棱两可，警察可能抓来一个嫌疑者就是该受害人的自家人（矛盾）．如此等等，不一而足．

2．前三律仅界定出了一个“正常思维”

这也是早为亚里士多德认识到了的．三律并非形式逻辑的本质性揭示，它仅仅是从直观上、经验上表明一个“正常思维”所应满足的几个条件而已．

3．第四律（充足理由律）揭示了形式逻辑特征

此即有了确切的初始条件就必能推出确切的结论．这就好像在一个具体动力系统的相空间内（见“四”），只要确定了初始点，就必然对应着一条轨线，沿着它就可以得到（结论表出的）相应的后继点．

总之，“四律”指出，在“正常思维”下，从准确条件必能推出准确结论．

三、形式逻辑的一个根本规律是因果律

从一、二段可直接得到一个共同的结论，它可归结为这样两条：

（1）形式逻辑是“推理”这样一个**运动过程**．

（2）推理过程是沿着一定**轨道**进行的，且这一轨道曲线是“若尔当曲线”（无自交、无循环）．

归总这两条，可认为形式逻辑的根本特征是“因果”，或说形式逻辑的根本规律是“因果律”．亦即因果律的涵义在于，它既表明了逻辑推理中条件（因）、结论（果）的先后顺序，也表明了因果间序关系是沿着一定轨道（途径）来实现的．

四、物质宇宙的根本特征是运动

这已是狭义相对论和宇宙学的成熟结论，不必多说．正是它的运动产生了时空．下面还将看到，也因为宇宙的运动是个严格的动力系统，所以产生了严格的“因果律”，且这一属性成为整个完全宇宙的特征（参见《大自然复杂性原理》）．

五、物质宇宙是个动力系统

1．先谈动力系统

定义 5.1 映射 $\varphi: X\times T\to X$，当 φ 满足如下公理：

（1）$\varphi_{t_0}=x,\ t_0\in T,\ x\in X$；

(2) $\varphi_t(x)=x_r$, $t=t_0+r$, $t\in T$, $r\in\mathbf{R}$ （实数）；

(3) $\varphi_{t+s}(x)=\varphi_s(x_r)$，

则称$\Phi(X,T)$为一个**自治动力系统**或一个**流**，简称**自治系统**或**动力系统**．称 X 为其相空间，称$\varphi_t(x)\in\Phi(X,T)$为一条（过 x 点的）**轨道**．

称不满足上述定义的运动系统为**动态系统**，或**运动系统**．

动力系统有如下特点：

(1) $\Phi(X,T)$对 T 是个“＋”运算下的“半群”（即这时的群运算“＋”不可逆，或说映射是单方向的），且是个连续半群，也叫 Lie 半群．

(2) $\varphi_t(x)$表明映射φ的结构式中不显含t变量，亦即轨道仅由初始点(x,t_0)决定．初始点又叫初始条件，初始条件改变将意味着轨道的改变．

例 4 微分方程

$$\dot{x}=f(x),\quad x\in X$$

即是个自治动力系统，注意到这里 f 与上述 φ 的区别，φ 只是积分方程 $x(t)=\int_{t_0}^{t}f(x)\mathrm{d}t$ 所决定的积分曲线族投影到相空间 X 上的流（轨道族），其中一条轨道可参见图 5.1 例示情形，而f则是φ的所谓“切映射”—— 向量场．

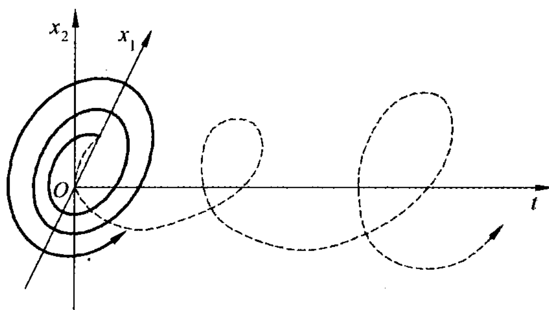


图 5.1（ $X=x_1\times x_2$（相空间））

2．物质宇宙（记为 X）是个本原性动力系统

所谓物质宇宙即通常说的宇宙，这里只用于强调它的物质性（也叫“粒性”）．

现在来考察“X是个本原性动力系统”，这里只要注意到X的如下四大特征即可．

(1) X是个运动体系，因已公认运动是宇宙的根本特征．

(2) 公认作为X级的运动体系是由当初的“大爆炸”一次生成的，因此它具有自身的固有规律，不受任何人为意志和“其他”物质宇宙的干扰，所以说X是

个“本原性”运动体系.

(3) 是 X 的本原性运动产生了时间 (t) 概念，且时间概念仅由 X 的本原性运动产生. 这是已被公认的狭义相对论的结论，亦即 t 是 X 的运动属性[①]，因而是与 X 的运动同生同灭的一种现象. 同时 t 具有单向性，它是与（大爆炸决定的且在缓变着的）宇宙速度成反比的单调函数.

(4) X 的运动轨道特征（即映射法则 φ），或说轨道结构不随时间 t 而变. 这是天体运动的观察规律，也是天体运动方程中传统的假设条件（研究天体运动正是“动力系统”学科之发祥地）.

总之，根据 (3)、(4)，X 是个动力系统，再据 (1)、(2)，可说 X 是个本原性的动力系统，不受任何其他因素的左右和干扰.

六、因果律正合物质宇宙 X 的动力系统特征

关于这一部分请读者自行检验.

同时由 X 运动的本原性知，**因果律**也是**本原性**的，**属于 X 的运动属性**. 因而**逻辑思维属于 X 的运动属性**. 亦即，思维规律是由物质宇宙 X 决定的.

注：应区别的是，世间上一切人为运动及其动力系统仅仅是隶属于 X 的运动属性（或叫动态属性），抑或说仅是迭加在 X 的（本原性）运动上的又一动力下的运动，而不是这里作为动力系统的本原性运动本身.

七、猜　测

猜测

逻辑思维的背景空间 = 完全宇宙（概念见后）= 逻辑思维对象集

把（形式）逻辑思维所反映的客观世界的“完全空间”叫做逻辑思维的**背景空间**，又叫做人类逻辑思维范畴集或叫做形式逻辑背景空间. 显然它也包括“逻辑思维”这一精神机能本身[②]. 现在我们要说明:

形式逻辑背景空间 = 完全宇宙

按第四章（第三节）有关定义:

---

① 事实上 X 所在的时、空皆由此本原性运动生成，这里只需要强调 t 这一面.

② 自然这一来就容易隐含“集合悖论”，给问题带来复杂性，这正是探索思维的本原所不可回避的困难，下面还将多次遇到这样的思维.

$$完全宇宙=(物质宇宙空间，物质宇宙对偶空间)$$

这样一个二象构成的**完全系统**. 同时根据第四章中"对偶"概念，宇宙（即物质宇宙 X）的对偶空间（记为 X^*）应该是 X 中元素产生的以及元素间产生的所有事物和属性的总体（集合）.

那么显然，除了观测到的物质宇宙 X 的运行规律这一属性是属于 X^* 外，还有自然科学理论和实验成果等抽象事物都属于 X^*，同时社会生活中除去诸如宗教思维（精神现象）、艺术创造和科技发明思维（灵感火花）等（属于非形式逻辑的对象）外，一切事物或事务（包括逻辑思维）也都属于 X^*.

由此容易凭借逻辑思维来判断，人类逻辑思维的一切对象和过程皆属于

$$X\times X^*\triangleq 完全宇宙=(X,X^*)$$

从而说明了为什么人类会共同遵从一个逻辑思维规律. 不过由于没有严格论证或验证，作为科学我们仍然只能说这是一个**猜测**.

进一步，若记人类逻辑思维（形式逻辑）的背景空间为 Ω，则若已经说明 $\Omega\subset(X,X^*)$，那么是否能说明 $(X,X^*)\subset\Omega$？亦即是否能说明 $\Omega=(X,X^*)$？这倒是难以严格判定的. 困难在于实际上 (X,X^*) 和 Ω 皆属无穷集，尚处复杂状态（因"集合悖论"），难以确定它们间严格的同构关系. 但仅就可观测部分来看，可以说 $\Omega=(X,X^*)$ 是正确的，所以我们仍作为一个猜想来提出.

最后注意到，形式逻辑的背景空间 Ω 并非只是决定形式逻辑. 形式逻辑仅仅是 X 的运动属性，或仅是其"因果律"属性，因此形式逻辑即使对于 X^* 也仅属于它的一个真子集.

八、推　论

1. 推论 1：完全宇宙 $(X,X^*)=\Omega$ 是个最大的动力系统

这是因为 Ω 包含了作为本原性动力系统的 X 以及由 X 决定的一切本原性运动属性，因而 Ω 以外不可能再有时间 t 意义下的，或说"因果律"意义下的运动对象及其运动属性了，因而对于 X 的运动或 Ω 的运动属性来说，不可能有 t 意义下的干扰（包括 t 规律的干扰和 t 随机的干扰），这是合理的结论. 若这样，Ω 即是一个最大的自治系统或叫最大的动力系统了.

注意到在此动力系统中的轨道，当其条件受到人为的改变时（成为新的初始条件），将改变运动轨道. 此"人为改变"即对应着发明创造、改变自然环境等（好

或坏）的改变.

*. 一个注记.

显然，在 X 上甚至 Ω 上是符合爱因斯坦的“上帝不掷骰子”观点的，但 S·霍金的“量子引力论”(见《时间简史》)说“上帝专门掷骰子”，怎样认识这一矛盾？我们认为这是因为两者的前提条件不同所致. 换句话说，它们在各自的意义下分别都是对的，霍金理论是在所谓“大宇宙（这里免作进一步解释）”前提下说的，而爱氏理论最多仅是在完全宇宙 Ω 前提下说的. 爱氏的正是本章所谈范畴. 从另一方面来说，如今霍金的量子引力论尚未建成. 但可以理解，即使量子引力论建成了，那时它的“掷骰子”概念已不完全满足 X 或 Ω 的前提了，届时还得重新界定其“掷骰子”的概念.

2. 推论 2：完全宇宙是个高维空间

已经知道，即使在数学严格的线性空间意义下，其对偶空间也可能与原空间不同维. 一般说，比如在泛函意义下的“对偶空间”则比原空间复杂得多，其维数也可以更高. 因此鉴于对思维范畴集 Ω 的观察，我们说 $\Omega=(X,X^*)$ 是高维的（Ω 维数＞2 倍 X 维数）空间，且说其中运动轨道族是致密的、对初始点具有连续依赖性的等，都是可以接受的猜测.

九、附注

显然我们这里已进入了思维世界的沙漠、逻辑范畴的边缘，进入了模糊区. “任何科学的前沿都是哲学”，所以这里我们不能不凭借人类最原始的，也是至今最基本的哲学认识方式—— 思辨、直觉与猜测. 比如我们还可能猜测到：

$$\text{人类逻辑思维空间} \subset \text{人类精神世界}$$

这是因为人对客观世界的反映（逻辑思维）具有“能动性”、预测（超前）性等，说明精神空间不小于思维空间. 同时，思维可能产生错误，特别还有精神病现象等. 这些都说明，人类精神世界不可能完全囿于 (X,X^*)，否则他只能按 (X,X^*) 赋予的规律作逻辑运动，因而不可能有供其“越轨”的“余维空间”了.

又，还可猜测到：人类的形式逻辑范畴在缓变着，这是因为物质宇宙 X 的运行速度在缓变.

总之，这里还有更多、更深的遗留问题有待探讨，但它超出了本书任务（参见《大自然复杂性原理》）.

第五节　辩证逻辑认识

前四节全是关于当前逻辑学的主流学科“形式逻辑”的认识，本节谈谈“辩证逻辑”

一、辩证逻辑产生的客观基础

已经知道，形式逻辑所反映的只是“完全宇宙”中事物间的因果关系，它是由“大爆炸”产生物质宇宙 X 时形成的，因而是 X 内在的运动规律（自治动力系统）在其完全空间 (X,X^*) 上的表征，特别在其对偶空间 X^* 上表现很抽象．这些都是形式逻辑的内容，统归于一个“因果律”或叫因果关系．比如数学中序关系、运算关系、函数关系皆属因果关系．按照因果关系既可考察 X 中天体的运动规律，也可预测未来的气候、地震、经济消胀等“隐讳”事务……

可是，人类面临的客观世界，仅仅是 (X,X^*) 吗？即使只是 (X,X^*)，它的存在规律仅仅是形式逻辑吗？显然不只，比如人类社会即不仅仅是一个形式逻辑对象，同时，(X,X^*) 中除了“因果律”这样的由“本原性自治系统”决定的动态规律外，比如还应该有（相对来说）“静态”的结构特征，需要去探讨．的确如此，辩证逻辑正是在这样的客观基础上产生的．同时，辩证逻辑的本质是什么？范畴是什么？都有待探讨．

二、辩证逻辑简顾

一般认为辩证逻辑学启蒙于康德，是他在其《宇宙发展史简论》（1755）中提出了宇宙的“对立统一”结构，与《纯粹理性批判》（1781）中提出“二律背反”概念一样，奠定了后来“辩证逻辑学”中重要的“对立统一”律．

接着是黑格尔发展了康德的这一辩证思想，其特点是把认识的世界范畴大大推广了．用今天的话来说，是黑格尔第一个把整个自然、社会、精神、历史描述成一个大系统，可叫做**大自然**．他认识到大自然的结构不是静态的，而是不断演变、涨落着的，并主张用这种方法去认识大自然的规律．

辩证逻辑作为一门学科的真正形成，是马克思、恩格斯的功劳．是他们在黑格尔思想基础上创立了唯物辩证法，并发展成辩证唯物主义，才算产生了“辩证逻辑”这门学科．

总之，**辩证逻辑**就是用辩证观点去认识客观世界结构规律的学科．所谓“辩

证观点”就是辩证法；所谓“辩证法”就是用非静止的、动态的、灵活的观点作具体问题具体分析的方法．抑或说就是用“二象论”的观点去认识客观对象．这里“动态”概念是指一种思想方法，不一定总是指物质宇宙内的本原性运动，但也有其运动属性下的、附加动力下的因果运动等．

三、辩证逻辑规律

今天说来，辩证逻辑可归为“三律”：对立统一律、量变质变律、相似律．

对立统一律又叫做矛盾统一律，属于“二象性原理”．根据第四章中“二象性”理论，任何事物内和事物间都存在对立统一关系，可见该定律是深刻、广泛地反映了客观世界的一大结构特征，因此它被认为是辩证逻辑的一项根本性定律．不过需要看到，这里“矛盾统一律”中的“矛盾”概念与“形式逻辑”中“矛盾律”的“矛盾”概念是完全不同的．这里“矛盾”表示“对立”，系客观世界通有的一种结构特征，是客观规律，是应该遵从的．形式逻辑中的“矛盾”是推理中产生的一种错误，是主观造成的，应该防止的．称前者为“自然矛盾”，或“客观矛盾”．称后者为“逻辑矛盾”或“语言矛盾”．“矛盾论”即是在“自然矛盾”（矛盾统一律）观点下发展起来的一个研究“一分为二”的辩证逻辑分支．

量变质变律，此即“量的累积能够产生质的突变”这一定律，也就是世界上存在的一种“突变”现象．按突变论的说法（第四章第一节），“突变”是表现事物形态的“参数”达到某种临界值时所产生的事物形态急剧改变的现象．从逻辑学观点来看，则说构成事物的“因素”产生了变化，当这种变化随着时间而积累，达到一定“阈值”时，事物便产生一种跃迁，形成了质的改变．这也是客观世界广为存在的一种自然（实则大自然）现象，从自然中的地裂山崩到社会中的矛盾突发，以及人与人之间的情感破裂等，皆属于“量变到质变”的现象发生．又如物理学向微观世界进发过程中，仅仅到了量子阶段即产生了如此多的不同于直观世界的本质特征，这也是一种量变到质变的范例．那么顺便问问物质细分到终极又将产生什么质变呢？

不过，如果把事物因素的量变累积统一作为“因”，把突然的质变现象作为“果”来看，量变质变规律也可说是属于形式逻辑的．尽管这里“因”与“果”间的过程十分短暂，但它在我们思维中，其推理过程仍然存在．但是，毕竟这一现象不仅只表现在形式逻辑的背景空间内，比如也有灵感、创造等属于精神领域的“突变”现象．所以综合各种思考还是认为，量变质变律属于辩证逻辑规律，仅仅不是辩证逻辑的典型规律而已．

此外，我们认为黑格尔的“否定之否定”律（螺旋式上升）也属于量变质变律的．

相似律．相似也是客观世界（大自然）中广为存在的一种结构规律，不仅有横向结构上的相似，也有纵深层次上的相似；不仅有有形事物上的相似，而且有无形事务上的相似，甚至现象与本质之间也有相似．具体比如，初等几何上的“相似”系指几何空间的（横向的或纵深的）相似；语言上的“比喻”系指事物或事务间的相似．特别地，**分形理论**（法，曼德坡，1975年，见第二章第二节）所揭示的也是事物或事务向纵深层次的相似（自相似）特征，且是一种普遍规律．更由张颖清（中国，20世纪70年代）的生物“全息胚”学说表明，这种分形结构（亦即相似律）已超越了形式逻辑的背景空间．

总之，相似律是包括分形律和全息胚在内的，这更为广泛的、大自然的一种结构规律．但过去未能视之为辩证逻辑的典型定律是一个缺陷，我们应该认为它是与对立统一律媲美的一种典型的辩证逻辑规律．

四、辩证逻辑的本质与特征

（1）上述现象亦表明，体现辩证逻辑本质的背景空间是包含或说超出了形式逻辑背景空间（物质宇宙）的．遗憾的只是限于任务，这里不容对辩证逻辑的背景空间作更多的讨论，因为它需要更多的准备知识和篇幅．但在今天的科学水平上，人们已不否认，辩证逻辑的背景“空间”是大于形式逻辑背景空间的，霍金的量子引力论也少不了要涉及这一空间（参见《大自然复杂性原理》）．

（2）辩证逻辑是高于形式逻辑、指导形式逻辑的．形式逻辑是一般的思维，但如何才能使思维更有质量、更能符合客观规律、更能揭示客观世界的本质？那么，接受辩证法的指导，树立辩证观点是十分重要的．换句话说，思维推理的前提条件和概念来自客观世界，这时“概念”作为一种信息，它来自事物却是脱离了事物的，因此可能失真甚至产生歪曲，也就是说存在概念化（升华映射）的质量问题．那么，辩证逻辑或说辩证法，则在这方面帮助思维或指导思维，它告诉我们在提概念、给条件乃至思维过程时，要注意客观事物的结构是“活”的、多变的、二象的，但也是系统的，有着普遍规律的．

（3）辩证逻辑发展甚慢．辩证逻辑学形成以来，已逾百年，但一直未能成为一门正式的基础学科，更谈不上发展成学科体系．原因自然很多，但归根结底可能是辩证逻辑涉及的背景空间超过了形式逻辑背景空间所引起的认识差异和困难．亦即它不仅超越了X，也超越了X^*，这就变得太抽象．特别因为这件事产生

在自然科学中兴时期，自然科学在整个科学中占据统治地位，甚至可说形成了“自然科学主义”. 而当时自然科学领域主要是在 X 内，即使在 X^* 内的部分也往往处于不自觉的状态. 在这时别说对超乎 (X,X^*) 的世界进行研究，就连承认它也是很艰难的. 因此，在这种状态下产生了两大特点：① 在辩证逻辑研究方向上，仅重于 (X,X^*) 上的研究，此即**自然辩证法**或叫**自然哲学**的研究，它回避了对超越 (X,X^*) 领域的探讨. ② 在辩证逻辑学概念下的研究中，产生了哲学上有史以来最为厉害的争论. 这就是“唯心论”与“唯物论”的争论，甚至上升成世界性政体上两大阵营的斗争，这对发展辩证逻辑学来说无疑是一个不幸事件.

正因为对辩证逻辑的基本观点、概念范畴等基本问题难以统一，更说不上形成自己的形式化系统，因而难以运用现代研究手段去发展它.

总之，尽管今天逻辑学分支已发展出了不少，但人类至今的逻辑学领域和主流，仍然还是在形式逻辑上，其范畴前沿仍未超过辩证逻辑；人类对逻辑学背景空间的认识则主要的还是在 (X,X^*) 上. 至于超乎于此的认识，在 20 世纪 70 年代以来进入软科学时代的今天，只能说已有了一定的解冻迹象.

第六节　“数学逻辑”及其认识

一、问题的引入

尽管在数学哲学中曾有过“数学与数理逻辑间隶属关系”的争论，但今天已倾向于数理逻辑不可能“囊括”数学，亦即数学的范畴至少要包含数理逻辑. 但是要问，数学是否完全属于形式逻辑？再问，数学的背景空间是什么？数学与所有逻辑学科的关系如何？这些都是本节要认识的问题.

的确，数学中存在一系列的哲学问题，数学从来都与哲学特别是逻辑学最为密切. 不仅历史上如此，直至现代，数学对逻辑学的贡献更为辉煌，不仅有作为主体学科的**数理逻辑**，而且还推广、发展、派生出了一系列分支逻辑学科，诸如“中介数学”、“制约逻辑”、“辩证数理逻辑”以及“布尔逻辑”、“模糊逻辑”等. 不过仅靠这些分支还完不成本节的任务，因为它们有个共同的特点，即各自都有一个自己的有限目标，并以此建立起自己的有限系统，所解决的也只是数学范畴某一方面的问题，所显示的虽然在数学范畴内但只是某一方面的特色.

本节的任务有别于它们，我们希望建立一个逻辑概念以总揽数学（包括应用

数学、基础数学）．但我们没有忘却，这里曾经是希尔伯特马失前蹄的地方，也是罗素为之望洋兴叹之处，因此我们不敢妄想建立一个有限系统去实现目标（因已共识，若要有一个这样的系统，至少得是个无限系统）．同时，即使对于构建一个严格的无限系统去实现它，也是本小节不敢奢谈的，于是我们只得从问题的另一方面作起．

我们总的想法是：**整个数学体系本身就是一门特别的逻辑科学，它是一门特殊的无限逻辑系统**．

二、数学具有逻辑学的基本特征

（1）作为思维规律的逻辑学，包括辩证逻辑，皆以“概念化”作为其基本特征，即使说现代逻辑已在概念化的基础上发展到了“符号化”乃至“形式化”，那么数学各个分支也完全具备**概念化、符号化、形式化**这一特征．

（2）逻辑学可理解为“对客观世界进行抽象认识，然后再反回去认识‘抽象’的客观世界”这样的学科，其实，数学正是这样的．

再说，逻辑学可理解为“狭义的”和“广义的”两种．前者旨在从客观世界中提升成一套有限系统，进行封闭运算，比如向世界纵深发掘的经典的逻辑学学科一般都属于这一类型；后者则是一种无限系统（无限多公理、概念），既然无限，即不能呈列出来，却也是有效的．可以说“数理逻辑”已沿着这条路走，但本节执行的却是另一个思路．

三、数学还具备独有特征

1．针对逻辑学的有限形式，数学本身即是个无限形式系统

我们抽象地（即不必实际去作地）把数学各个分支（包括过去、今天和将来可能产生）的所有概念集、符号集、公式集、运算推理规则集，一并归成一个大的形式系统，则它具有两个特点：

（1）几乎每一门学科的概念、符号、运算等皆遍布于学科整个内容，难以统一地罗列出来，只有已经“公理系统化”了的诸如几何学、数理逻辑学某些分支等少数学科容易罗列出来．特别因为一般学科尚未最后成熟，随着它的发展，还在不断产生着新的概念、符号、公式等，所以从这一意义讲，它们都是“无限形式系统”．

（2）数学学科还在不断增多，因此其学科集也难以罗列出来（包括尚未创立

的学科）. 因为尚未创立的学科，也将有它独立于已有学科的系统，仍然是表征整个数学世界的成分. 从这一角度说数学也是“无限形式系统”.

20 世纪 30 年代，数理逻辑学家已经认识到，要表征数学至少需要无限的形式系统才行. 为此，数理逻辑（比如递归论）学家已创造了无限递归、超穷归纳法等，但人们并不认为仅此可以达到它的初衷. 那么，我们这里则把数学的过去、现在与“未来”的一切形式作抽象地汇总，无须自己作任何加工设计，顺其自然地用数学的原样来“描述”它这样一个“无限形式系统”，自然应该是最准确的、最简便的. 当然也是不可罗列出来的，不可操作的，不过用以表明本节的意图，足够了.

2. 数学不只含有现代形式逻辑的特征，也含有普通形式逻辑和辩证逻辑的特征

数学广含“现代形式逻辑”特征已属无疑，往往还因此被误认为数学仅仅属于现代形式逻辑. 因此，这里将着重表明，它不止于此. 比如还含有传统（普通）形式逻辑的特征和辩证逻辑的特征，为此只需例证即可.

（1）数学推理中的普通形式逻辑例.

比如世界著名数学教育家波利亚推崇的“合情推理”（第一章第一节）中即包含白话语言的直观理解. 显然它属于普通形式逻辑，即使考虑到它有时也有“半定量”性，最多只能算是一类符号逻辑，而非数理逻辑的.

其实，在许多数学定理的证明中作思想转折和语言简化时，也不乏这种出自直观、思辨的、普通形式逻辑的推理，许多论文的潜伏错误也往往出在这些地方.

（2）数学中的辩证逻辑特征表现.

例 5 极限概念. 比如“$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ni|x-x_0|<\delta$时，必$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称$f(x)$当$x\to x_0$时的极限为 A，把这一过程记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$”. 这里充分体现了量变到质变的规律，是辩证逻辑的.

同理，当$y=f(x)$在x_0处光滑时，显然增量Δy与Δx将同时缩小至 0，却可能有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{x_0}\neq 0$. 类似这样凡有极限的地方都体现出量变质变的辩证逻辑特征.

例 6 拙文“一类交通安全与经济效益模型”（载《系统工程》91 增刊）中有这样一个模型：

$$F(X,t)=f(X^0(t))-\frac{(1+\varepsilon)X^1(t)}{\left(\dfrac{\alpha\Delta t}{1+\Delta t}\right)\prod\limits_{i=1}^{k}(1-G_i)+\varepsilon}$$

其中$G_i=\int_{t_j}^{t}(g_i(X^1(t))\mathrm{d}t\in[0,1]$，$g_i(X^1(t))$为第$i$个不安全因子；$X=X^0+X^1$=生产投入+安全投入；其他符号自明．显然$G_i$在［0,1］上量变到1时将使$F$产生质变．

又如，我们在 Ecological Modelling，84（1996），11～27上描述“大熊猫与箭竹”这一生态系统的数学模型中，也体现了这类量变到质变的辩证逻辑特征．

例 7 第四章中谈到，“对偶空间”V^*与原空间V所构成的完全空间(V,V^*)即是一个对立统一系统，特别在其“第三节、三”提出的“二象互动”模型更是数学表征客观事物“对立统一律”的典型一例．

至于相似律，在数学中从古典到现代，从初等到高等，都广为存在的“相似性”研究内容，即属此．比如，从傅里叶级数到调和分析、小波分析都广为存在波的大小嵌套和相似性．特别地，已谈到的“分形几何学”这一创自20世纪70年代的数学分支，更是专门揭示客观世界中一种“自相似”结构的．

总之，不可否认，数学中特别是现代数学中也有丰富的辩证逻辑特征，只是由于辩证逻辑的范畴和背景空间尚未明晰，而数学的边际也未清楚（不可能清楚），所以辩证逻辑与数学间的包含关系目前尚无法得知．

四、“数学逻辑”的概念界定

根据上面分析，也许可以把整个数学叫做一门新的逻辑学了，我们称其为“数学逻辑”．于是我们可以这样来界定数学逻辑．

数学逻辑：以数学现有的和将有的各分支学科中已有和将有的概念集、符号集、公式集、规则集、运算集，这样每一集都是无限集的总体无限集，所形成的一个无限的形式系统叫做**数学逻辑**．它针对其背景空间，经概念化抽象成模型和问题，然后用广义的数理逻辑或说“类”数理逻辑的手段，探索更为广泛的客观世界规律，而不是像数理逻辑那样，探索的只是数学的内在基础（即纯数理逻辑推出的数学内容部分）．

注：这个“界定”中既体现了与一般逻辑学，特别是与数理逻辑的基本相似点，又体现了与数理逻辑的根本不同点．这点主要表现在，数学的背景空间更为广泛，所用方法也更为广泛，不只拘泥于命题演算、谓词演算（例见三、例2），从而它探索的世界也更为广泛．但“数理逻辑”主要目标在于为数学寻找逻辑基础——首先希望由数理逻辑推出数学，目前已经推出算术系统，正在推出代数系统．当然，如果数理逻辑真能完全地推出数学，那么数学逻辑也就可以囿于数理逻辑了．反之，如“数学逻辑”真的包含了数理逻辑，则数理逻辑不可能完全地

推出数学．我们猜测，后一结论是成立的．如果这样，给出“数学逻辑”概念不会毫无意义．

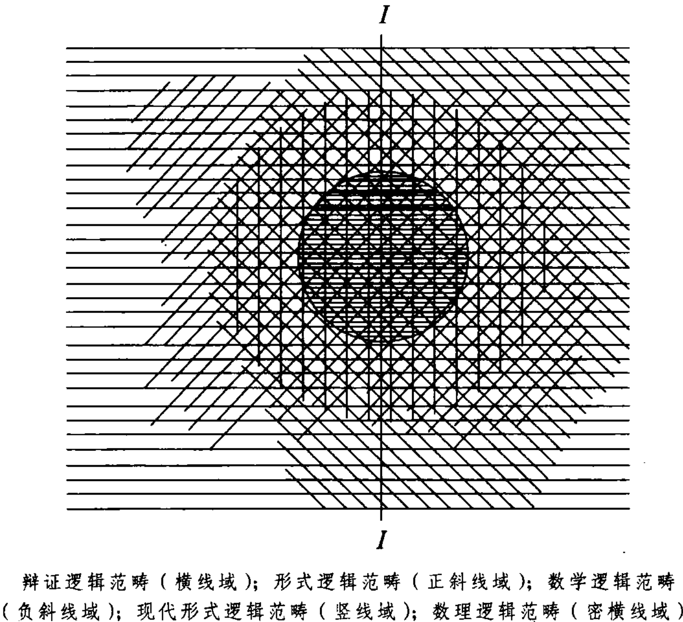
总之，“数学逻辑”就是数学本身，一点也没变．其意义仅在于，有了数学逻辑的概念以及它与形式逻辑、辩证逻辑的关系认识，以后就不必再为找“数学的逻辑范畴”而犯难了．

五、几种主要逻辑范畴间的关系认识

至此，已就主要的逻辑体系作了简述，现在综合起来看看其概念之间的“序”关系或说其范畴之间的包含关系，特此用图 5.2 和图 5.3 分别表出．

图 5.2 相当于它们间的俯视图，可见除数理逻辑范畴具有分明边界外，其他范畴的边界都是模糊的．这是因为数理逻辑是公理化系统，它具有完备性，而其他逻辑学领域都不具此特征，所以如此作图以示区别．

从图 5.2 中还可看到，数学具有横断性，除包含数理逻辑外，还横跨了其他各逻辑范畴．此外，其他四种逻辑都具有依秩的包含关系．



辩证逻辑范畴（横线域）；形式逻辑范畴（正斜线域）；数学逻辑范畴（负斜线域）；现代形式逻辑范畴（竖线域）；数理逻辑范畴（密横线域）

图 5.2 （Ⅱ线为下图所用）

图 5.3 是对图 5.2 沿“Ⅱ”线的剖视图，以此可以更明确地看出它们之间的

包含关系，但对各个范畴边界的开闭性却不便表现，其中数学逻辑与辩证逻辑的上下底边互相交织，表明这两个逻辑范畴间的包含关系尚不完全清晰.

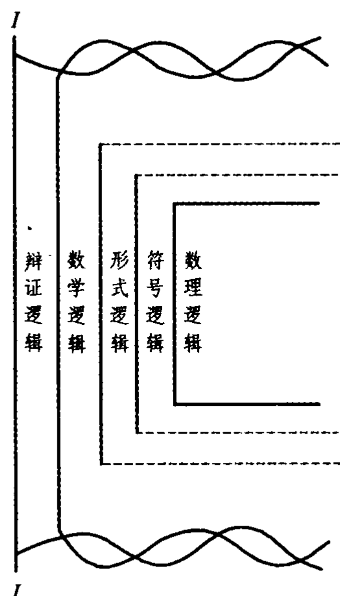


图 5.3

第七节　关于多值逻辑的认识

本节讨论现代“数理逻辑学”的一类重要的分支理论.

一、概念的引入

1. 从多值逻辑到模糊逻辑

多值逻辑又叫多秩逻辑，它是（经典的）二值逻辑的推广和派生. 因此，其思想肇源于 19 世纪布尔逻辑的产生，最初是三值逻辑或一般的 n 值逻辑，总之是有限值逻辑（$2<n<+\infty$）. 其特点是除了所谓“真值”、“假值”外还有介于其间的值（第三值；第四值等等），但皆因其应用领域不宽，致使其发展较为缓慢. 比如它虽然在电路分析上有所应用，但显然不及布尔逻辑有力；即使在量子理论上也有应用，仍并不得力. 直至 20 世纪中后期以来，科学进入所谓“不确定性”时期和不确定性数学得到很好发展之后，多值逻辑发展到了无穷值逻辑，这才得到

了真正的发展．无穷值逻辑又叫模糊逻辑，如今“模糊逻辑”已成了多值逻辑的代名词，因此本节着重围绕模糊逻辑来认识．

产生“模糊逻辑”的基础是不确定性问题，为此先来看看：

2．不确定性问题的基本特征

（1）这时形式逻辑的四大定律不能得到完全满足，具体说是“排中律”不能得到满足，或是“充足理由律”不能得到满足．

（2）它们的数量特征表现为［0,1］区间上的任一值．

显然，据（1）多值逻辑应属形式逻辑的派生，据（2）多值逻辑应属布尔逻辑的推广．总之，**多值逻辑仍属形式逻辑范畴**，它的特点是既吸取了现代形式逻辑的表述优点，又注意到贴近人类思维的本来特征（模糊性）．下面进一步叙述多值逻辑产生的机理和学科特征．

二、不确定性的存在机理

1．形式逻辑的古典部分和近代部分

从形式逻辑的历史发展过程看到，今天的形式逻辑是由两部分构成的，此即：

（1）古典部分．

已知这是当初亚里士多德时期形成的部分，它仅由三律：同一律、排中律、矛盾律来界定，主要是描述思维的概念、推理、判断等过程．由于它历史悠久，又被称为“古典部分”．

（2）近代部分．

这是 17 世纪莱布尼茨提出的，它主要刻画证明、辩论等思维过程．为此，它需要在原有“三律”基础上再加一个“充足理由律”才能完成．把这样在近代才扩展成的部分叫做形式逻辑的“近代部分”．

显然，形式逻辑的近代部分是古典部分的推广与扩充，但还不止于此．这就是我们所关心的如下特征区别．

2．形式逻辑近代部分的人为特征

容易看到，一个证明或辩论问题都有个“目标”．不针对一个具体的“目标”就谈不上证明，也谈不上辩论．自然，这个“目标”应当产生在证明或辩论过程之前，那么它是怎样产生的呢？它可能由别人提出，或者由证明（辩论）者自己提出．但不管怎样它本质上不应该来自形式逻辑，或说不是来自完全的形式逻辑思维，它可能来自灵感、直觉、联想，或在很少的信息基础上经过思维的跳跃而产生．我们总体上把它叫做（科学）猜测．稍作思索即可注意到，在生活和科研

活动中，这种科学猜测性思维现象十分普遍，可说一切理论成果和创造发明都首先产生自“猜测”. 数学也是这样.

现在要说的是，相对于形式逻辑本身的内容，这种“猜测”具有外来特征，也是人为特征. 也就是说，它是在人为设定的外在目标之下，才进行形式逻辑思维的. 但形式逻辑的古典部分没有这一特征，原则上古典形式逻辑只要在现有的条件（“因”）之下凭着“三律”推理，得到的结论（“果”）是什么就是什么，而不存在那个需要判定其结论是否达到了的“目标”. 所以这种具有“猜测”的人为部分的思维，是有别于形式逻辑的古典部分的.

“古典逻辑”好似推铅球，只要在一定规范下推出去，落到哪里即是哪里；“近代逻辑”则好似射箭，不仅需要在一定规范下射出去，还要求结果与“目标”的相合性. 作为一种本质的解释可回到爱因斯坦空间去.

3. 人为特征产生的不确定性

如图 5.4 所示，其中空间为完全宇宙空间 (X,X^*)，亦即相对论完全空间（虚实“二象”合成的）. 因其为“弯空间”（属一般流形），作为示意特别取 T 轴为弯轴来表示.

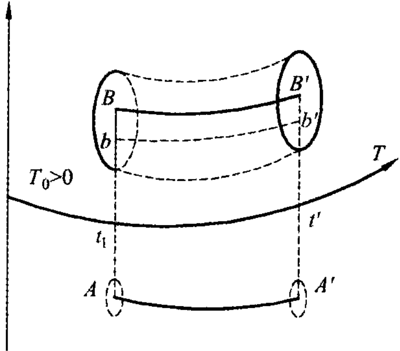


图 5.4

设当前时刻为 t_1，这时从现有条件开始作逻辑推理；再设现有条件对应于（完全）空间中的（抽象）位置在 A 点，则因 (X,X^*) 是个自治系统，由它决定的形式逻辑，自 A（充分条件）沿其固有轨道可推至 t' 的结论 A'，这就是形式逻辑古典部分的直观解释.

至于形式逻辑的近代部分特征，可解释为“B 及其邻域”与“B' 及其邻域”间的关系，这时不是事先有了 B 去推出 B' 的问题. 恰好相反，是事先人为地猜测到，可能有 B' 成立（自然是在未来时刻，记为 t'），需要在现有时刻 t_1 找出一个初始点 B（充足理由）以沿着它的一条逻辑轨道能达到（推出）B'，或已知理由（B）和猜测的结论 B'，要我们去找出 (X,X^*) 空间中是否有连接 BB' 的逻辑轨道. 比如，一般定理的证明即属此情形. 现在我们关心的问题是在两种情形下都可能有这样的问题：或者已知 B' 但找不出准确的 B 点（充足的理由）而只能找到其邻域中近似的 b 点（近似于充足理由）；或者给出的条件（对于 B）本身就不确切，只落在 B 的邻域内某点（仍记为 b）. 所有这些情形，沿着过 b 的轨道推下去都只能得出 B' 邻域内的点 b'（近似于 B' 的结

论）．当然严格说来这种“从邻域推到邻域”是有条件的，只是这一条件比较弱罢了．此即要求动力系统对初始点具有连续依赖性，这对于一般拓扑空间内（拓扑）的动力系统都能满足．

显然，对于同一个 B'（或 B），其邻域中点 b'（或 b）的有关量相对于 B'（或 B）的典型量（取为 1）来，则只能是属于[0,1]的值，所以叫这种推理是**多值的**，或叫**不确定的**．这就是对形式逻辑近代部分中的人为性所产生的不确定性的直观理解．

三、不确定性问题的分类

我们把不确定性问题分为三类：

1．超逻辑不确定性问题

我们定义，在形式逻辑甚至辩证逻辑范畴内不可能得到确定结论的问题都叫做**超逻辑**问题．超逻辑问题具有本质的不确定性．比如量子场中的“测不准”性，经济学中的阿罗悖论和阿莱怪圈（参见拙著《数量经济学导论》），物质可分性之争乃至罗素悖论问题等等，至少从目前人类对它们的认识状态来看，可以猜想它们中至少存在“超逻辑”问题．当然还有待进一步的“逻辑”判定．

2．技术性不确定问题

这是一种非本质的不确定性问题．也就是说，从本质（逻辑）上看来，问题应该是可解的，结论应该是明确的，但从人为能力来看，包括技术设备、对因素的掌握和有关信息的收集等，常常不一定能做到使问题成为确定的．显然，这类问题很多，比如工程测量问题即属此类（参见拙著《社会度量学原理》）．

例 8　某单位今年职称评定中使用过去的“科研和教学记分规则”，得到某两人同分数，但定额只允许上一人，从而产生了（技术性）不确定问题．为此，学科组又增加了一个“社会工作成绩记分”项目，从而使问题变成确定的了．

例 9　知识竞赛，常常以 10 分为基本单位记分，因此容易造成多组得分相同的结局．比如，某次竞赛结果只需取一个第二名，却有 3 组成绩同属第二名，显然这种不确定性也是技术性的．因为只要再就这三组继续竞赛之，即可逐步得到确定．

总之，技术性不确定问题是可以通过技术处理，或经技术水平发展而得到解决的不确定性问题．

3．人为性不确定问题

比如，一个人的头发有多少是客观事实，但若人们设定一个“量”化概念，

记满发为 1，秃头为 0，则绝大多数人的满发“度”只能属（0,1）了，从而借鉴布尔二值（确定）逻辑，问题即成为非二值的或不确定问题了. 显然，这种不确定性是相对于人为给出的概念而发生的.

又如，人的年龄分布是个连续整数，是客观事实，但一个 50 岁男士对于一个小孩来说该叫他爷爷还是伯伯，则成了不确定问题. 显然，这是因为人定概念{爷、伯}的 0,1 性引起的，因而是人为性的不确定问题.

特别地，人为的不确定性还包括人类自然的思维形式（凭白话表述）中存在的不确定性. 这已是人们熟知的生活现象，它常常是生活中造成误解和无益争辩的一个重要原因.

四、模糊逻辑及其特征

从“三”中所述的内容可见，对于本质性不确定问题“1”，原则上不是形式逻辑所能解决的，属超形式逻辑甚至超辩证逻辑范畴的问题，超出了这里的讨论范围.

至于技术性不确定问题“2”与人为性不确定问题“3”，正是形式逻辑范畴内的不确定性问题. 它们或因人的能力暂时不可达（情形 2，如随机问题)，或因人为新引入的概念而成，抑或因人的思维特征与科学的要求不符所致（情形 3). 总之这些都需要且能够作出正面研究、探讨其规律，特别在现代科学形势下更需要这样做，更有能力这样做，于是多值逻辑便应运而生了.

模糊逻辑主要是在计算机科学和模糊数学（第九章第五节）的刺激下活跃起来的无穷值逻辑. 模糊逻辑还是一门十分年轻的逻辑学科，不过目前它的内容除了引入模糊概念外，主要思想还是借鉴或移植经典数理逻辑或数学逻辑而来（当然模糊逻辑本身也属于“数理逻辑”一个现代分支). 这点类似于模糊数学的特点，不过这也正说明它的年轻性和需要作深入突破以从方法上形成独立学科特色的困难性. 但也不能不看到，从实际背景和逻辑领域来看，多值逻辑和模糊逻辑的确有着它独立的一块疆域.

具体说模糊逻辑可描述为：由取值于［0,1］的模糊变量集；$[0,1]^n \to [0,1]$ 的模糊公式集；算符集、关系符集，如 $\vee$（合取)、$\wedge$（析取)、$\Rightarrow$（蕴含)、$\Leftrightarrow$（等价)、［,］括弧等，以及模糊恒真、恒假与文字、语句、单项、补项等条件所形成的公理化系统，叫做**模糊逻辑**，它是二值逻辑的推广. 此外，它还在“模糊推理”上表现出“一方面借用数理逻辑的表现手法；另一方面更加贴近人类思维”的特征. 诸如其“模糊假言推理”等即如此.

第六章　实数再认识

石头抛起来会落下，果子成熟了会下落，自古以来见惯不惊，习以为常．原来“习惯”也有麻痹人的作用，致使对它发问的人不多，作解答的人则更少，所以牛顿伟大．

实数在人类生活中接触最频繁，从开始记事的孩子到尖端科学的研究人员都离不开它．那么我们问，实数是什么？人类已经认识透了实数吗？如果说人类至今尚未认识透实数，且将永远认识不透实数，你相信吗？

面对这样的发问可有多种不同的反映，一种是不假思索者，本着它脑子里存在的一种模模糊糊的认识回答，“实数不就是连小孩子都懂得的东西吗?”；另一种是大吃一惊者，不问不知道，一问吓一跳，“哇，医学发展至今还治不了感冒，数学发展至今还认不透实数，真奇怪啊!”；第三种人则是大多数知识分子，他们知道要真正认识实数不容易，但究竟是怎么回事，无暇问津；最后一种人则是数学家，他们对实数的“深度”最有感受，对实数理论最有掂量．

通过本章的讨论将使大家认识到，对实数的认识从来都是数学的中心任务之一，从古代、近代到现代都是这样，相信将来也是这样．可以说整个数学完全可以从实数理论出发，“辐射”得到，且实数理论不仅是数学的核心，也是一切科学，特别是自然科学的根基．不过对实数的认识却不只是现在的水平．

那么，实数为什么会有如此深刻的奥妙？也将在本章中回答．不过正因为实数联系着整个数学，所以不可能全部内容都在本章叙述，有些已在其他章节重点述出的内容，在此只需点到为止．

流行的实数理论多注重严谨的数学论述，但容易使人感到枯燥，为此本章在介绍既有实数理论重要成果的同时，也尝试着从认识论和生活观察、思维欣赏的角度去写，希望这样更能服务于本书的宗旨．

第一节　实数认识的几个重要成果回顾

一、算术—— 实数的运算性质

已知实数集上的直接演算叫做算术．算术起自加法，同数连加得乘法，同数

连乘得方幂. “加”与其逆（减）运算一起称为“二则”算术，连同“乘”与其逆（除）运算则得“四则”算术，再连同“方幂”与其逆（开方）运算则得“六则”算术，这就是最基本的也是初等的**算术**.

此外，随着实数理论的发展，还产生了本质上是作为函数式的“指数”运算及其逆（对数）运算，从而发展为“八则”算术. 再后，人们进一步在函数的意义下把“微分”及其逆（积分）运算也归入算术运算而成为“十则”算术，这主要是为了“表彰”微积分方法的简便易学和普适有效性.

那么，算术还有没有可公认的“十二则”算术、“十四则”算术……呢？至少今天还没有出现成熟的可与微积分方法媲美的数学方法，因而还没有“十二则”算术……

下一章还将看到，对于一切集合来讲，实数集上的运算功能是最强的，也是最为丰富的，因此科学一旦把客观事物“映射”到数域上来，便可以运用其上丰富的运算功能，寻找客观事物间的关系和规律了.

*作为一种训练，请考虑一下，是否可借鉴虚数的表示方式来推广第八则（对数）运算，建立负数的对数 $\ln(-|a|)$ 运算？若能建立，是否有意义？

二、数论—— 整数的组合特征

数论几乎与算术同样古老，数论的古称也叫算术（arithmetic）. 的确，比如其“初等数论”就是（整数的）“六则”算术. 但数论同样有它的现代化，因而被誉为是既古又新的学科之一. 由此足可略知，仅仅一个整数集，就存在着多么丰富的组合规律，何止是个“万花筒”？它让人类世世代代扑朔迷离，永无终极.

数论是“容易进而不容易出（出成果）”的学科，表现为技巧性特别强. 仅就世人共知的数论三大世界难题而论，三百年来不知有多少“业余”学者，包括一些中学生，误入其中浪费了不少青春，落得个空手而回. 这些都间接地表明了整数的组合规律是何等的奥妙复杂.

如今三大难题的状况是:

华林问题: 任一正整数 n 必为 4 个数（正实数，下同）之平方和或 9 个数之立方和或 19 个数之四方和. 1770 年提出，19 世纪末为（数学无冕之王）希尔伯特解决.

费马问题: 是否存在整数 $x,y,z(xyz\neq 0)$ 及 $n(>2)$ 使得 $x^n+y^n=z^n$. 1637 年提出，1994 年为 A · 怀尔斯否定地解决，由此他不仅获得 1996 年沃尔夫奖等多项大奖，更获得 1908 年悬赏的专项奖 10 万马克.

哥德巴赫问题: 每个不小于 6 的偶数必为两个奇素数之和（即“1 + 1”问题）;

每个不小于9的奇数必为3个奇素数之和．1742年提出，至今未完全解决．对此，陈景润解决的“1+2”问题（20世纪70年代）仍保持着世界冠军地位．

由此可见认识整数的组合规律之难．还要说明，随着数论的发展，它的世界性难题似乎变得越来越多，只是因为现代科学的时代特征才使得它们不再那么“震撼世界”了．

数论的现代研究除了老而新的“初等数论”和以哥德巴赫问题为核心的“解析数论”外，就是与代数学结合的“代数数论”、“数的几何”、“结合代数数论”等，以及“组合数论”之类应用基础分支．

三、数系的扩展

数系的扩展可分为“实数系”的扩展和“多元数系”的扩展两大支系．后者主要指一元数（即实数）、二元数（即复数）和四元数．据Frobenius定理，只有一元、二元、四元数能构成数域，这是有意义的（它暗示了“数”的“二象”性，待述），其中又以一元数系和二元数系最为丰富、最为有用．关于二元数系留待第七章中补说，本章仅谈一元数（二象“数”之实象）的扩展，或即实数系的扩展．

实数系的扩展可分为两个途径：

1．代数途径

在这一意义下

$$\text{实数集}=\text{实代数数集}\cup\text{实超越数集}$$

代数数集即一切有理系数代数方程 $P_n(x)=0$ 在复数域上所有根的集合（n 为任意自然数）．“实代数数集”则为其实根（不是实部）这一子集．

实超越数集＝实数集\实代数数集（“\”表逻辑减）．

人类对代数数、超越数的认识较晚，系1740年代由欧拉等人提出．容易看出“实代数数集”包括全部有理数，即 $ax+b=0$ 的根（a,b 为整数），也叫一次代数数．同时还包含无穷多无理数，比如，n 次方程的一类根 $\sqrt[n]{a}$（a 为素数，n 为自然数）即是．此外，还知道代数数是可数集，且测度（概念见第四节）为0，但并非任给一个实数都能判定它是否为代数数，至今亦不能完全判定．换句话说，对于超越数只能一个个地去证明，但这是很难的．第一批（1750年代）被猜测为超越数的实数是π，e 和 $\dfrac{\log b}{\log a}$（$a,b>1$，有理数），但第一个被证明的超越数是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n!}$，或更一般的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n10^{-n!}$，其中 $a_n\in\{0,1,\cdots,q\}$（1844年，刘维尔）．1870年

代证明 e 是超越数（法、埃尔米特）；1880 年代证明 π 是超越数（德、林德曼）. 至今虽容易证明（比如笔者）诸如 $\sin n, \cos n$（n 为自然数）等无穷多个数皆为超越数，但比起超越数集的不可数性和完全测度来，实属仓海一粟.

总之，这就是从代数角度对实数系认识的基本状态.

2．几何途径

在这一意义下

$$\text{实数集} = \text{有理数集} \cup \text{无理数集}$$

自然，对有理数集已较熟悉，知道它是可数集，测度为 0. 换句话说，也知道了无理数集不可数、具有完全测度（概念见第四节）. 但对无理数的进一步认识亦如对超越数的认识一样难. 事实上，两者都是对实数集认识困难性的（同一个本质的）不同侧面反映.

人们很早就提出无理数概念，至少应从欧几里得在其《几何原本》中证明 $\sqrt{2} \neq \frac{q}{p}$（有理数）算起. 但也已知道，并非所有无理数皆根式形式，这预示着认识无理数之难. 实际上从无理数集的不可数和“全测度性”亦知，对无理数的认识难度应等价于对实数集整体认识的难度. 所以这一桩事业一直拖延到 19 世纪后半叶才得以展开. 如今这方面已有很丰富的内容，下面先就人类对实数集的整体认识略谈几点.

四、实数的序性、稠密性和完备性考察

自从笛卡儿坐标概念诞生（1619 年），实数集就几何地等价于它的坐标系——一维实轴. 因此对实数集的考察就是对实轴的考察.

关于实轴的序性（良序性）和稠密性，无须多说，现考察一下实轴的完备性.

1．完备性定理

所谓实数集的**完备性**，即实轴上不存在任何间断点（非实数点）. 所谓**完备性定理**，大致可叙述为：如图 6.1 所示，在实轴 **R** 上任给一个实数 a 将 **R** 分成左右两集，则分割点 a 必同时是左集的上确界和右集的下确界.

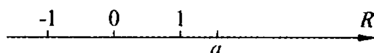


图 6.1

作为完备性定理的证明思想，一个是戴德金分割法，另一个是康托尔的“用有理序列可表出所有实数”的方法．后者即设有无穷位小数 $a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$，其中 $a_i = 0,1,2,\cdots,9, i \in \mathbf{N}$（自然数集），$a_0$ 为有限整数，则

$$a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} \qquad (*)$$

已熟知，当其为循环小数或有限小数（$\exists m \in \mathbf{N} \ni i > m$ 时 $a_i \equiv 0$ 者）时，（*）式表有理数；否则，当其为无限不循环小数时，由达朗贝尔比值判别法知，级数（*）总是收敛的，其收敛值即是非有理数—— 无理数．由 i 的无穷性和 $\{a_i\}$ 的组合性知，（*）式可表出所有实数，这就是完备性定理的一个证明思路．事实上，比如即使 a_i 仅取 0 或 1（$i \in \mathbf{N}$，二进制）仍能表出实数．此外有：

2．戴德金分割法

关于 $\mathbf{R}$ 的完备性定理也可由戴德金分割法获得．该法的直接动机是证明无理数的存在，但却同时获得

（1）$\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_r$（有理数集）$= \mathbf{R}_I$（无理数集）；

（2）$\mathbf{R}_r$ 与 $\mathbf{R}_I$ 使实轴完备．

戴德金分割的基本思想是，从 $\mathbf{R}_r$ 出发，任将 $\mathbf{R}_r$ 分割成且只分割成两个非空子集（记为 A, A'），则据 $\mathbf{R}_r$ 的“序”性，若 $\exists a \in A, a' \in A' \ni a < a'$，则必 $\forall a \in A$ 及 $\forall a' \in A'$，皆满足 $a < a'$，记为 $A < A'$，称 A 为下集，A' 为上集．这时只有如下几种可能的分界情形：

（1）A 有最大数，A' 无最小数．

（2）A 有最大数，A' 有最小数．

（3）A 无最大数，A' 无最小数．

（4）A 无最大数，A' 有最小数．

但一一检验知，（2）不合理，因这里是仅就有理数而言．若这时设 A 有最大数 a，A' 有最小数 a'，则据 $\mathbf{R}_r$ 的稠密性和序性，比如即有 $\frac{a+a'}{2} \in \mathbf{R}_r$，却 $\frac{a+a'}{2}$ 不属于 A 和 A'，矛盾．

显然（1），（4）决定的分割点皆有理数，但（3）决定的分割点不属于有理数，因而“非有理数”是存在的，沿用历史称呼，叫它做**无理数**．

换句话说，从有理数角度看，无理数就“不是数”．因此无理数不可能像有理数那样能写出来，即使像 $\sqrt{2}$ 这么简单的也只能用符号来表出．其实从二象论意义更能猜测到，无理数应该是数的“二象结构”中的虚象．因此说“二象观”使

得戴德金分割的思想更为深刻了.

此外，戴德金分割法也同时证明了 $\mathbf{R}$ 的完备性，即 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_r\cup\mathbf{R}_l$.

五、实数的集合论认识

第三章第一节谈到集合概念在数学中的基本性和广泛性，但集合概念产生的初衷（1873 年、康托尔）却不在于此，而是为了认识实数集结构的本质特征. 这就是康托尔创立的“集合论”和后来的“公理集合论”的任务.

1. 集合论的诞生引起的两件震撼数学基础的大事

（1）连续统猜测.

康托尔为了认识实数集的本质，首先把目标指向“无穷集”的**结构特征**认识，由此提出了三个概念:

① 可数无穷集，即与自然数集同构的无穷集，并指出这是“最小的”无穷集.

② 不可数无穷集，又叫超穷集.

③ “势（potency）”又叫基数（cardinal）. 这是推广“有限集合的元素总数”概念而提出的，并以“势”来将无穷集分类，把一切可数无穷集归为一类，记其势为 $\aleph_0$（阿列夫 0）. 由此得出“任一无穷集必存在与其无穷子集同势”的性质. 比如一切可数无穷集皆与自然数集同势. 对于超穷集则更为复杂，假设它有若干类，依秩记为 $\aleph_1,\aleph_2$，⋯.

那么有这样的问题，$\aleph_1,\aleph_2\cdots$是否存在? 但最要紧的问题是:

$\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间是否还有势? 换句话说，$\aleph_0$ 类与 $\aleph_1$ 类之间是否还有别的超穷集类?

对此，康托尔证明了 $\aleph_0<2^{\aleph_0}$（幂集势），并提出猜测: $\aleph_1=2^{\aleph_0}$，即是说，$\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间没有别的势了，可数集到超穷集是一下子变到所谓“连续统”的，这就是有名的康托尔“连续统猜测”.

（2）集合论引出了系列悖论.

康托尔在其集合论中提出了一个“一切集合的集合”概念，其实这本身就是个悖论，由此还产生了系列悖论，其中最有名的是“罗素悖论”. 后来被编成所谓“理发师悖论”、“克里特岛人都撒谎”等易于理解的故事. 比如，理发师悖论: 一理发师说他给且仅给一切不给自己理发的人理发. 由于他不能给自己理发，悖论就发生了. 关于集合论还有诸如布拉里-弗蒂（关于“序数”集的）悖论，Banach 分球悖论等.

要强调的是，这些悖论的发生并非集合论的过错，恰好是由此揭露了数学的隐患，从而使人们发现，数学的“空间”并不完备，对数学的根基也有待认识，由此引发了数学的“寻根”热，引起了人们对“基础数学”之格外重视．这些都是“集合论悖论”的功劳．但康托尔一度曾为此忧心忡忡，加上受到集合论反对派诸如克洛列克等的压制，以致酿成他的忧郁症，成为数学史上又一幕悲剧．

不过集合论的支持者是大多数，诸如希尔伯特、柯尔莫哥洛夫、哥德尔等名家都是为集合论呐喊开路的人．这里谈谈集合论为克服“悖论”所做的努力．

2．公理集合论及其新的矛盾

我们知道（第二章）公理化方法在数学模式严格化上有着奇特的作用．因此在集合论遇到麻烦的时候，人们自然会想到公理化这一“如意法宝”．由此，集合论进入到了它的**公理集合论**时期．

（1）ZFC 公理系统

集合论的“公理系统”①主要有两套：一套是贝尔内斯-冯·诺依曼-哥德尔给出的，简记为 BNG 系统；另一套是策梅洛-弗兰克尔-柯恩给出的，简记为 ZFC 系统．目前多采用 ZFC 系统．

ZFC 公理系统最初产生于策梅洛为回避集合论悖论，并力图回答康托尔猜测而提出的公理条例，后为弗兰克尔修改，形成所谓 ZF 系统．但它仍实现不了初衷（因 1940 年哥德尔证明 ZF 系统不能判定康托尔猜测），直到 1963 年更由一个年轻人柯恩证明，ZF 系统与康托尔猜测是彼此独立的．由此对 ZF 系统做了进一步的修改，成为 ZFC 系统．

ZFC 系统由九个公理组成，（注意到作为公理往往都是些简单事实，这里就不一一作解释了）它们是外延公理、空集公理、无序对公理、正则公理以及替换公理、方幂公理、集公理、无限公理、选择公理等．

虽然 ZFC 系统有所进步，比如对集合形式的表述更为清晰了，但仍实现不了策梅洛的初衷．主要问题在于：

① ZFC 系统自身的完备性不可证明；

② ZFC 仍然判定不了康托尔猜测的正确性；

③ ZFC 系统中，前八个公理与第九公理—— 选择公理的关系仍然是个谜．

（2）选择公理之谜．

选择公理：在一个集合族中，可以从每一集合中选取一个元素构成一个新的

---

① 严格说来，这里的还不应该叫做公理系统．因为（第二章）公理系统应满足公理条例间的无矛盾性、独立性和完备性，但这里还没有严格证明满足这“三性”，不过我们仍然形式上把它叫做公理化系统，特此约定．

无穷集合.

这一公理看起来似乎是真实的，特别对于有限集族或可数集族，简直就是直观的了，事实上却形成了明显的两派观点. 反对者说，对于无穷集族实现不了“选择”，但为啥硬要实现呢，用求无穷极限、无穷归纳法的思想不就可以了吗？不过，承认了选择公理的确也会产生诸如 Banach 分球悖论等矛盾，只是承认了选择公理所得到的“合理”结果要多一些罢了. 但不管怎样，至今还没有一种方法能确切地判定出“选择公理”是对还是错.

总之，选择公理的特点是：

① 选择公理既有“功”又有“过”，即更多时候正确（功），但也有矛盾（过）.

② 选择公理与连续统假设互相独立，因此它对于解决连续统假设起不了作用.

③ 公理集合论既不能证明选择公理对，也不能证明选择公理错.

ZFC 系统中前八个公理与选择公理的关系类似于《几何原本》的五个公理（实为公设）中前四个公理与第五公理—— 平行线公理的关系，因此公理集合论可以从承认选择公理与不承认选择公理两个方向去发展.

事实上，我们认为一切事物一旦进入到无穷（大或小），都将少不了有一个本质，那就是“二象”结构中二象间的“互动”关系，因而必须同时考虑到二象才是. 这里也许因为只强调了（介观物质式的）“静态”结构特征，而忽视了它的对偶面，诸如非点式、非静态等特征，才导致既是又非、亦真亦假的奇妙结局.

3.“集合论悖论”与现实生活

其实，上述“集合论悖论”在我们的生活中也可看到，比如人类社会普遍实行的行政领导形式. 从根本上说，至今人的自私性还占强，因此社会尚存这种“集合论悖论”机制. 具体说从“官”的制能来讲，他代表着所管范围内全体公民的整体利益，但从人员对象来讲，他（官）又是集合中的一元. 尽管可以从集合外派人去领导，但本质上仍改变不了他是所辖集合中一元的实质. 因此说这时难免产生“集合整体属于该集合中一元”这一实质，从而产生了元素大于集合的“悖论”.

这就是任何一个社会，任何一种制度下，为官者中总有徇私舞弊、贪赃枉法现象（即所谓“政府腐败，古今中外，概莫能外”），且屡打不绝的机理所在.

但从另一方面，官职总是需要的，怎么办？为回避这一“悖论”机制，那就是监督、防范. 人类为此花费的各类“成本”已不少，还将继续如此. 简单说来至今世上已有了许多种防范腐败的制度、法规和组织形式，归结起来可分为伦理道德类和法律监督类这样两大类（“二象”结构）. 至于诸如选举制、问责制、透明制、任期制、下院制、换防制、弹核制等种种方式，那就太多了，可见人类为

回避这一“悖论”付出了多少艰辛.

事实上，只要稍作留意还可发现，类似这种“悖论”在经济社会中、心理学上乃至平常生活中都有它的表现，因此有必要把这种思想上升到意识上来，将更有利于社会治理、通用管理和科研活动.

第二节　实数集的宏观欣赏

一、实数认识的四大阶段

粗略地说，实数认识可分为初级、高级、深入和抽象四大阶段，它们的分界点分别是“笛卡儿坐标”下实轴的诞生、集合论的诞生和“非标准分析”下的模型 $^*R$ 诞生等，不妨称后者为“鲁轴”的诞生.

1．1619 年前：初级阶段

此阶段内，人类对实数集的认识有如下特点：

(1) 对于实数集还没有一个较好的模型，除了扳拇指和一堆堆实物概念外，对于数量还没有个较好的帮助思维的形象表述，因而显得更为抽象，难以深入.

(2) 此期内仅对有理数有较多认识，表现在度量实践、算术运算和数论研究上. 当然这只是相对的说法，比如要是从现代观点看，当时即使在这些方面的认识仍然也是初等的.

此外，在此期内也认识到了“无理数”的存在（指出它无理），表现在证明 $\sqrt{2} \neq \frac{q}{p}$（有理数）和用根式表出（1～4 阶）代数方程的解等. 但毕竟没有能力直接去研究无理数.

(3) 此期内对实数的认识仅限于有穷形式，表现为使用的是“穷竭法”，针对的是直接来自实际的数学问题，诸如鸡兔同笼、廿树梅花之类. 即使产生自古希腊的几何学三大世界难题（倍立方体、三等分角和化圆为方等问题），也是直接来自实际的、直观的问题，这些问题本身并没有更高的观点和抽象.

2．1619 年后：高级阶段

1619 年 11 月 10 日是笛卡儿坐标的“生日”，自此以后实数认识产生了如下转折.

(1) 是笛卡儿坐标使实数有了十分形象的一个几何模型—— 实数轴，极大地

帮助了人们的思维，促进了对实数集的认识深入. 因此必须承认笛卡儿坐标系概念的建立，它既是数学进入高级阶段的开始，也是人类对实数集认识进入高级阶段的一大里程碑.

(2) 伴随着17世纪数学进入高等数学时期，对实轴认识也引入了“无穷”概念，比如对数列、级数的研究等即是.

(3) 此期内，人们有能力直接研究无理数，运用的是无穷不循环小数、戴德金分割法、测度论等方法. 另外，人们更能从超越数角度研究实数，不过这一方向还有待进一步突破.

3．1873年后：深入阶段

1873年康托尔针对实数集的认识提出了“集合”概念，随之在集合观点下，认识实数 R 的各种集合结构和集合的无穷特征，并形成了以解决“连续统猜测”等为中心的、关于实数认识的“集合论”分支，并于20世纪初（由于悖论的刺激）被数理逻辑学家发展为“公理集合论”.

虽然“公理集合论”至今还困惑在“连续统猜测”与ZFC公理系统以及选择公理间的扑朔迷离中，但这正说明了“公理集合论”已深入到问题的实质和核心领域，是好事.

4．1965年以后：抽象阶段

1965年鲁滨逊创立了非标准分析，这是对实轴认识的又一突破. 这里只要强调，是非标准分析中建立的实数模型 $^*R$（鲁轴）使得人类对实轴的认识达到了又一个抽象的地步.

当然，这一说法还有待公认，目前包括非标准分析的意义和地位、作用，都还处于逐步被承认的艰苦过程中. 因此这一“抽象阶段”的路子还很长，很艰难. 为避免重复，具体介绍放在第十一章.

二、实轴再欣赏

1．打油诗一首

实轴 **R**＝一支箭⊕一个“0”⊕一个“1”（见图6.2），如此而已？

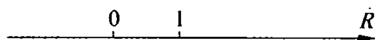


图 6.2

实轴（既＝又≠）一根棒、一条线、一维物质空间？

那么实轴究竟是什么？
原来实轴是一个抽象的一维世界；
实轴是一维的笛卡儿坐标系；
实轴是实数集的一个几何模型.
因此
实数集同构于（或说等价于，一一对应于）实轴.
所以
实轴 $\Leftrightarrow$ 实数集.
但必须看到
从实数集到等价的实轴是一个伟大的突破.
是实轴使实数集进入了直观世界，历历在目；
是实轴使我们"看到"了，**R** 应该有完备性，不应该缺损一个"点"；
是实轴使我们"看到"了更多、更多，
……
可也应该看到
实轴毕竟只是"实轴".
实轴给我们的只是一个直观世界，
若要真正看"透"它，尚待新的"伟大突破".
也许这个突破不只是鲁滨逊的 $^*R$？
……

相信"二象观"能在这里起点作用.

2．一个小故事

一个数学专业学生，当年曾幻想把实轴的连续统结构，像苹果一样摆在人们面前来；甚至幻想，也许人们所走的数系发展道路走错了，才使得如今对无穷小结构、无理数表述、连续统认识等如此艰难；幻想找到一个新的数系表述法，使得上述困难迎刃而解……为此，他经常想得头发晕，但晕过之后又想．最后幻想虽未实现，但也得到了一些"收获"．最大的收获是，他对诸如极限、微观世界、稠密集合之类对象的有关知识，接受起来比较容易，而且对数学的兴趣也更浓了．下面列出他对 **R** 的两个"认识法"，欣赏取乐耶.

（1）多层放大法：实轴在一点处邻域结构的认识.

如图 6.3 所示，在实轴上点 a 处取一邻域区间 $(a_0^1,a_0^2)\subset\mathbf{R}$，$a\in(a_0^1,a_0^2)$，再取点 a 的邻域 $(a_1^1,a_1^2)\subset(a_0^1,a_0^2)$，其长为 (a_0^1,a_0^2) 长的 $\dfrac{1}{m}$（m 为正整数）．现将 (a_1^1,a_1^2) 放

大 m 倍，如图 6.3 (1) 所示，这时再取 a 的邻域 (a_2^1,a_2^2)，其长度为 (a_1^1,a_1^2) 长的 $\frac{1}{m}$，再将其放大 m 倍成为图中 (2)．如法炮制，继续 n 步可得图 6.3 中 (n)．这时的 (a_n^1,a_n^2) 即是 (a_0^1,a_0^2) 的 $\frac{1}{m^n}$．显然步骤还可任意进行下去，亦即 n 可以任意大，可见点 a 的邻域自 (a_0^1,a_0^2) 缩小至 $\frac{1}{m^n}$，n 任意大后仍然存在，实在是达不到“点 a”．

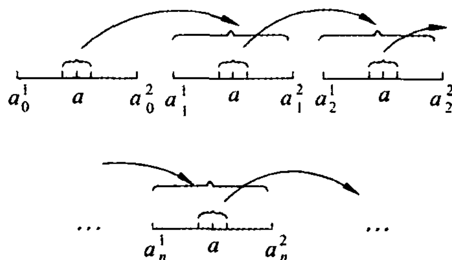


图 6.3

换个角度说，如图 6.4 所示，我们把自己一层一层地缩小 m 倍，“进去”看 a 处的微观世界，当缩小任意 n 级后所得到的点 a 邻域按照上述意义仍与 (a_0^1,a_0^2) 一样，并且始终达不到“点 a”．这是怎么回事?

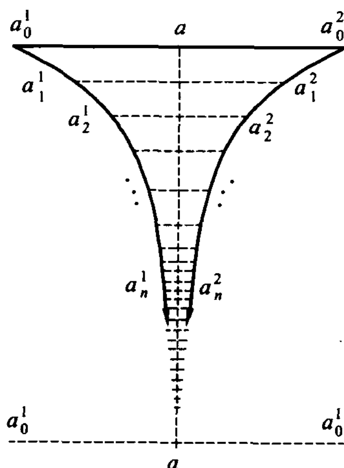


图 6.4

这些事实不能不使我们反省，是否我们的数学方法有问题? 如果是抽象的几何空间也许还可作上述考虑，但若是物质世界还能这样吗? 若不能这样，我们的方法还有意义吗? 这些都是不能不考虑的问题，后面的确还将遇到这样的问题，

因为这是数学的根本性问题之一啊！

（2）漫画“实轴”.

为了理解实轴在一点邻近的结构和实轴的“连续统”性，久思不得其解，只好以一幅漫画自慰.

如图 6.5 所示，如果把实轴上任一点 a 比作一个人的头部，那么与其左右相邻最近的人只能与之分别合用半边脸和一只眼睛才可能使我们无法从实轴上区分出任一点 a 来. 这就是“实轴”，这就是将此漫画（见图 6.5）取名为“实轴”的缘由.



图 6.5 （实轴）

注：近年来笔者还多次收到不同专业人士的试图重建实数系的“成果”，可惜都存在明显错误. 借此想告诉后来者，怀疑、思考是好事，它有利于增进思维习惯，但最好是多从探索本原的角度去思考，应致力于先从本质上去回答了你的怀疑，再说重建、创新问题，否则容易犯概念性（也就是根本性）错误.

三、实数集与数学的发展史

实际上我们已先后涉及这样一个结论：

数学发展史可以说就是人类对实数集的认识史；数学的每次大突破几乎都带来实数认识的突破或本来就起自实数认识的突破.

这里仅以一例来说明上述问题：

例 1 数学三大危机对实数认识的促进.

皆知，数学的三次大危机一次次推进了数学的发展，同时也一次次推进了对实数认识的发展. 这就是：第一次：毕达哥拉斯的“有理数悖论”. 它使人们对实数的认识从有理数进展到了无理数. 第二次：“芝诺悖论”. 它产生于公元前 5 世纪，重提于 17 世纪，初步回答于 19 世纪，从而产生了极限论，使人们对实轴的微观结构认识达到了一个新的深度. 进一步回答则在 20 世纪（续见十一章）. 第三次：因为“罗素悖论”而产生了“公理集合论”，对实轴的“连续统”结构进行了直接认识. 虽然未成，但这是至今数学对实轴认识的一个重要的前沿阵地.

历史上，数学的突破直接联系着对实数集认识的深化. 例子还多，除了上述数学**三大危机**外，还有数学**三大突破**（极限论、集合论、非标准分析）、数论**三大**

难题（第一节、二），以及数学进展**三大阶段**（点式数学、邻域数学、泛函数学，见第十章）等都体现了这一特征．这些都将在不同地方分别谈及，为免重复兹不赘述．

至此，我们更有理由相信，人类对实轴认识的进一步深入必将联系着更为深刻的数学突破，愿这样的事天天发生．

四、方寸嵌宇宙、滴水含太阳

1878 年康托尔证明了，任二有限维光滑流形 M,N 间总是同“势”的，即它们能建立一一映射关系．据此设 $M=(0,1)^2$，取

$$N=\mathbf{R}^3\times T\triangleq\mathbf{R}^4\quad（宇宙）$$

则 M,N 皆满足有限光滑流形条件，所以应有

$$f:N\rightrightarrows M$$

f 为一一映射，“$\rightrightarrows$”表满射．自然，这就是**方寸嵌宇宙**．

又，设给定一滴水为球形，并设其为单位球的 K 倍（显然 K 很小），又据太阳半径 $R=69.5$ 万千米，为简便计，取太阳和水滴共同的中心为原点，建立坐标系 (x,y,z)，并取映射

$$\varphi=K\frac{r}{R},\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\ \ (x,y,z)\in(太阳空间)$$

于是得到**滴水含太阳**

$$\varphi:\ 太阳\rightrightarrows 水滴$$

“滴水含太阳”说法来自莱布尼茨当年发出的感慨．

现在我们还是回到实轴（一维）的情形．显然，据康托尔上述定理也完全有

$$F:[0,1]\rightrightarrows[0,1]^n$$

其中 F 为一一映射．这说明单位长实轴上几何点集可与任意有限维立方体上几何点集一一对应，似乎不可思议．但至少对于它们的有理点集间的一一对应关系可做如下理解：将 $[0,1]^n$ 每边作有理等分（比如皆取 10 等分），相应地对［0,1］（原象）作 10^n 等分，显然前后者的每一分格点皆为有理点，且［0,1］的分点集与 $[0,1]^n$ 的格点集之间可一一对应．又，对［0,1］中每一分段 $\frac{1}{10^n}$ 单位长，再作 10^n 等分

（仍为有理分点），相应地对$[0,1]^n$分成的10^n个立方体（$\frac{1}{10^n}$(n方单位)）再作10^n个等分（有理）格点，并再让［0,1］中第二层次的各个分段与$[0,1]^n$中第二层次的各个分格点一一对应，这是自然的．如法炮制之，鉴于有理数的稠密性，分割可任意下去，完全不必担心［0,1］上的分段缩小得太快．

以后将看到（见图 11.2），比如佩亚诺曲线即是实现

$$F:[0,1] \rightleftarrows [0,1]^2$$

的一个例子．

所有这些都是实数集的无穷性、超穷性所显示出来的奥妙．至今数学对它还仅只能作出星点例述，远谈不上彻底的理解．

五、居中原理

我们在作实轴时为取它的"原点"，只要在带箭头的线段内任取一点，记为"0"即可，而不必取线段的中点．这是为什么？因为这里"有方向的线段"代表实轴，是一条直线，因而是无穷长的．原点本应是中点，但无穷直线的中点是哪点？原则上找不出中点，因而说没有中点．换句话说，"没有中点就点点都是中点"，或说任意定义一个中点即可．这就是上述任取一点"0"的原理所在．

事实上，无穷长加减任一有限长还是无穷长，且加后的无穷长与减后的无穷长仍是对等的（既等势又等测度）．因此我们任取一点"0"不会亏了正半轴或负半轴．正如我们说在二维坐标系中任取一条有限位置上的直线（见图 6.6 中 L 线）都能把坐标平面分成"对等"的两半平面，或说三维坐标系统中任取一有限位置上的平面，皆把坐标空间分成"对等"的两半空间等等，都是一个实质．

从另一方面说，如图 6.7 所示，可把圆周一一映射到直线上去．

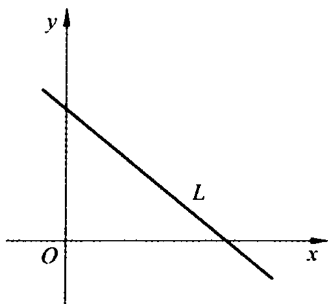


图 6.6

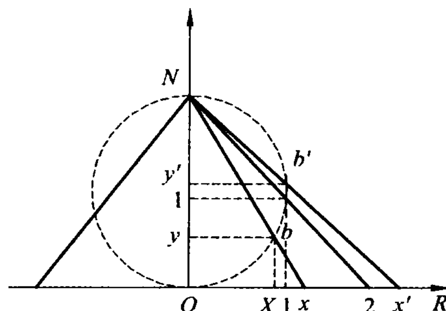


图 6.7

设坐标如图 6.7 所示，则单位圆的方程为

$$x^2+(y-1)^2=1$$

从而有：

$$y=1\pm\sqrt{1-x^2}$$

（如图 6.7，对同一 X，当 y 取 b 时式中取“－”；当 y 取 b' 时，式中取“＋”.）例如，对于图 6.7 中的 $\triangle NOx \cong \triangle Nyb$，有几何式

$$\frac{Ox}{yb}=\frac{ON}{ON-Oy}$$

换成代数式（或叫坐标式），有

$$\frac{x}{X}=\frac{2}{1+\sqrt{1-X^2}}$$

所以有直线 **R** 上的 $x=\dfrac{2X}{1+\sqrt{1-X^2}}$，这时有映射

$$x:[0,1]\to[0,2]$$

同理对 $\triangle NOx' \cong \triangle Ny'b'$，可得 $x'=\dfrac{2X}{1-\sqrt{1-X^2}}$. 这时有映射

$$x':[1,0]\to[2,+\infty)$$

这里用到了极限 $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{2X}{1-\sqrt{1-X^2}}=+\infty$（洛必达法则）. 注意到 x' 映射中 X 的 $[1,0]$ 段对应于 $\widehat{b'N}$；x 映射中 X 的［0,1］段对应于 $\widehat{Ob}$.

至此，除了单位圆上 N 点和 **R** 上的“∞”外，两者已能一一对应. 进一步，正如无穷小的极限可视为 0 点，在极限意义下无穷大也可视为一个“∞”点，由此可将圆中 N 点与 **R** 的“∞”点对应，则两者即成为“完备”的一一对应了. 这是合理的，是在射影几何意义下得到了证明的，在拓扑学上叫做“加点紧化”. 这时再把直线 **R** 看做实轴（严格说还要经一个“疏密变换”才能与具有均匀坐标（度量）点的实轴完全一致），则我们总可以说实轴 **R** “完备”地等价于圆周.

那么，圆周的中点何在？显然既可说无中点，也可说点点皆可作中点. 这就是实轴上任一点皆可作“原点”的另一种解释.

问题是，我们推广实轴取原点的这一“原理”，立即可看到，世上任何处于无限状态中的有限事物都有这种特征. 比如当人类不知道太阳系，更不知其概貌时，

心理对天宇是个“无穷”概念，这时容易认为“地”，是天宇的中心（中点）．一旦知道太阳系，太阳系便在人类认识上成为有限对象了，这才解除了“地心说”可是当不知道银河系的概貌时，心理上对它也是“无穷”的，这时又会认为太阳系是其中心．后来银河系成为人类的“俯视”对象（有限对象），才知道太阳系原来只在银河系“扣盘”形状的靠边位置．可如今人类尚不能鸟瞰宇宙，至今它在我们心里仍是无穷的，因此我们总觉得银河系处在“中点”位置．

又，当我们对一项事物的变域认识处于模糊状态时，常常承认这种事物都有两个极端，可见我们自然地认为这时事物处于中间位置的状态．

再则，我们常常可怜昆虫寿命太短、身躯太小，这说明我们认为自己在生命的“无穷”范畴中是最适中的．设想我们自己是昆虫又会怎么想呢？也许会认为昆虫世界（寿命、大小）是最适中的，它反会怜悯人体太庞大、笨重，活得太久了．这一说法也不无根据，因为大自然的进化是按最优方式进行的（兹免论证，见拙著《社会度量学原理》)，按“极限原理”所进化成的状态自然也是最优的，所以昆虫的寿命与其身躯、生活等应该是适中的，否则它就会迅速进化，改变那种非优状态了．

此外，比如我们的理论中总要有基本概念、基本定义、基本公理作为“基石”去建立，为什么？生活上用到的数为何不能得到严格值？等等这些现象都在于一个“居中原理”．

亦即，归总上述观察，我们容易看出，大自然中存在一种**居中原理**——有限实物、事物和事务在相应无限世界来讲，都可被看做是居中的，或适中的．这不仅只是一种心理感受，应该说这本来就是“无穷”世界中有限事物的一种表现特征，也是“无穷”的一个性质．

第三节　实轴上一点处的欣赏

本节将从几个不同的角度提出实轴在一“点”处的认识问题．而这些问题都归结为一个无穷小认识问题，然而这却是还没有最终解决的问题．我们深信无穷小的真正认识与连续统猜测的彻底解决是紧密相连的，具有同质性困难．

一、分杵问题与物质结构观

战国时有个叫惠施的说：“一尺之杵，日取其半，万世不竭矣”．那么问万世后，或万万世后杵是什么状态？

不妨设一世为100年，以每年365天计，则万世后杵长为

$$\frac{1}{2^{365\cdot10^2\cdot10^4}}=\frac{1}{2^{3.65\cdot10^8}}\approx\frac{1}{10^{10^8}}\quad（杵）$$

万万世后杵的长约为$10^{-10^{12}}$（杵）. 再计

$$一尺之杵=\frac{1}{3}米=\frac{1}{3}10^6微米=\frac{1}{3}10^{10}埃$$

所以万万世后的杵约剩$\frac{1}{3}10^{10-10^{12}}$埃. 可见它早已超过了人类技术达到的纳米（$10^{-9}$m）级别、费米（$10^{-12}$）级别，甚至还大大小于基本粒子尺寸. 那么这时的杵是否已成为无穷小了？否，仍只能说非常小，不能说无穷小. 数学上说只要是能够确切表述的小都不是无穷小，因为无穷小是一种变量，是一种“状态”，**是另一种概念**. 对偶地看，无穷大是以无穷远“点”为中心的一个（无穷小）开“邻域”，因此任何有限数都不能进入它.

显然，上述分法还可任意下去，但都是“确定的”量，且是有理数. 尽管这时的有理数从技术上早已无法得到，但它从理论上表明，这一分法只有达到无穷才可有个尽头. 换句话说，在数学意义下，杵是不可能分完而成为“0”长的.

但毕竟这是物质的杵，因此不能不考虑它的物质结构和对物质剖分的可能性问题. 这一来便可知，远未到万世时，已不可能“日取其半”，而只能是剖分艰难，取半更难了，到那时每取一半都应该获得一次诺贝尔奖了. 因为长度小到比如氢原子尺寸（1 埃）以下，早已不再是静态物质了. 这时它既是粒又非粒，既是波又非波，既在此又不在此. 换句话说，这时的物理背景已产生了本质变化，或说进入了另一种物理空间，这时还要按介观尺寸去分割它，岂能不难？

那么物质的微观结构、基本粒子理论与实轴的无限分割、微观结构理论之间是否有它的共性，是否值得彼此参照、互相启发呢？显然是应该的，而且十分必要（见第十一章）.

二、区间端点认识

先谈谈**测度**概念：对于一个 n 维的几何对象 A，若有一个依秩嵌套的、皆含于 A 的、n 维空间的、且能一一度量其体积的所谓“内序列”，和一个依秩嵌套的、皆包含 A 的、n 维空间的、能一一度量出体积的所谓“外序列”，则当内序列的度量（单增）序列与外序列的度量（单减）序列皆有极限，且极限值相等时，叫此

公共极限值为A的测度（measure），记为mA. 特别地，比如对于一个几何点只能取“内序列”为0序列，因此几何点的测度只能为0.

注：请注意“测度”与“势”两个概念是有本质区别的，一旦指明，甚是显然. 但若不指明，有时甚至容易产生混淆. 原来它们一个来自“度量”思想推广，一个来自“点数”思想推广. 又如，后者没有空间因素，前者有空间因素. 比如，n 维空间对象在 m 维空间 $(m>n)$ 来测度总是为 0（如平面面积在 3 维空间来测度（体积）总为 0）.

设有区间$[a,b]$，定义它为闭区间. 相应地把$[a,b)$叫做左闭右开区间. 两者的差异仅一个几何点b，那么问$[a,b]$在失去点b之后的$[a,b)$，其右端是什么状态? 又，$[a,b]$是个连续统，仅失掉一个测度为0的b点，不还有与b点相连的点作为右端点吗，怎么说是“开”的呢?

是的，比如在测度意义下一个点的确无足轻重，例如有

$$m[a,b]=m(a,b)=m[a,b)$$

也有区间［0,1］与［1,2］间的距离

$$d([0,1],[1,2])=d((0,1),(1,2])=d([0,1),[1,2))=0$$

还有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，当$f(x)\in C^0[a,b]$时（连续函数），在$[a,b]$上的积分值与在(a,b)上的积分值相等. 甚至这时$f(x)$在$[a,b]$上有有限个乃至可数多个第一类间断点时，该积分同样有意义等，都说明个别几何点似乎无足轻重.

可是也有连一个**几何点**都不可忽视的情形，且这种情形还多呐. 比如一个动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y)\\ \dot{y}=g(x,y)\end{cases}$$

只要f,g满足适当条件即可产生如图 6.8 所示的轨线结构. 其中奇点M是不稳定结点，点N是高次奇点，在Ω区域内轨线都流入N，而过点N的非Ω内轨线皆往外跑，所以整个看起来，就好像Ω内的所有轨线都通过N一个几何点“逃逸”了. 可见这时一个区区几何点也有何等重要了.

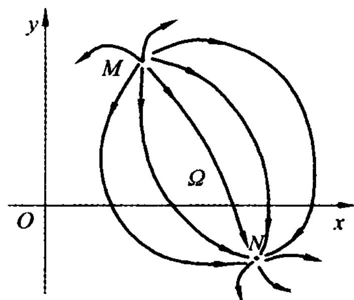


图 6.8

现在回到区间$[a,b]$的端点认识时似乎觉得还容易理解，可是拿掉一个点b成为$[a,b)$后，说这时右端没有了端点就很难想象了. 这是个关于点b的无穷小邻域

结构问题，是个静态与动态的观念转变问题，我们归结到下一问题中去回答.

三、与任一实数最贴近的实数认识：稠密（粒）观与连续（流）观

对此，我们先考虑一个“弱化”了的问题.

1. 任给一个有理数，寻找它最靠近的有理数

当然，我们已经知道根据有理数的稠密性，即容易给出“证明”式地回答，但证明不能代替认识(亦即理解). 比如什么是稠密性，即需要理解. 只有去理解、认识它了才有利于培养思维. 为此，先来看一个特殊的有理数分布图.

我们看到，若用整数将实数轴作出“等分”，则每一个（单位）区间都有着相同的结构，这就是所谓“上帝只造了整数，其他的就是人的工作了”(克罗内克). 现取［0,1］区间作讨论，如图 6.9 所示，对［0,1］之“杵”先取$\frac{1}{2}$分点，再就每个$\frac{1}{2}$长再取$\frac{1}{2}$分点，如此下去，并将图中每个分割层次标以相同高度的分割线. 显然从理论上还可任意次地进行下去，这就构成一种有理数的分布图.

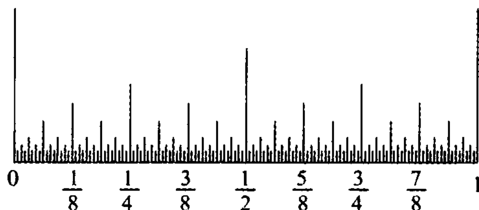


图 6.9

这时我们看到，第一层分割得到 1 位有限小数的有理数；第二次分割得到 2 位有限小数；第三次分割得到 3 位有限小数，由此猜到，可能任意“第 n 层”分割下的有理分点即 n 位有限小数. 为此，用归纳法证明之：已有了第一层试分，现设第 n 次分割可得到 n 位有限小数，即 $\frac{k}{2^n}(k\leqslant 2^n-1$，自然数）为 n 位有限小数，记为 a，则第 $n+1$ 次分割得

$$\frac{k'}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{k'}{2^n}\right)\quad (k'\leqslant 2^{n+1}-1\text{，自然数})$$

当 $k'\leqslant 2^n-1$时即为 k，这时

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}\right)=0.5a$$

使 a 增加一位小数，为 $n+1$ 位小数，合理；当 $2^n \leqslant k' \leqslant 2\cdot 2^n-1$ 时，表 $k'=2^n+k$，则有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k'}{2^n}\right)=0.5\left(\frac{2^n+k}{2^n}\right)=0.5+0.5a$$

仍为 $n+1$ 位小数．由此可得出两个结论（见定理 6.1、定理 6.2）．

定理 6.1 如图 6.9，用 2 分法所得序列层次下的任意第 n 层有理数皆为 n 位有限小数．

显然，这一规律在实轴上任一单位区间内皆如此，仅表现为其整数位的不同而已．

此外，有理数除了整数、有限位小数外还有一类无限循环小数，在哪里？显然它们属 $\frac{k}{2^i}$ 型和 $\frac{k}{10^i}$ 型有理数以外的情形，比如 $\frac{k}{9},\frac{k}{7},k$ 为整数即属此情形（顺便指出无限循环小数是一种分形的自然嵌套结构）．

定理 6.2 任意给定一个 $\frac{k}{2^i}$ 型有理数，与之最贴近的同型有理数不可能有限地得到．

同时，定理 6.2 可以推广到一般情形．

定理 6.3 任给出一个有理数，与之最贴近的有理数都不可能有限地得到．

作为定理 6.3 的证明（思想），首先需要证明对单位区间，比如 [0,1]，作任意地 r 分割（$r\in\{2,\cdots,10\}$），按图 6.9 的分割方式任意下去，皆得系列有理分点，互相不是“最”贴近．同时证明，将所有这些分割中的有理分点无穷集取“并”集，所得有理点集，相互仍不是“最”贴近，更不会有重合．因此只有当各种分法都无限进行下去，才有可能“得到”最贴近的有理点．

由此进一步有：

2．给定一个无理数，对其“最贴近”的数的认识

首先看看任一无理数是无穷不循环小数的实质．原来它就是一个无穷的有理数列收敛值，比如 π 即为有理数列 $\{a_i\}^{\infty}$ 的收敛值，其中有

$$a_1=3.1$$
$$a_2=3.14$$
$$a_3=3.141$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{10}=3.141\,592\,653\,5$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

显然$\forall a_i \in \{a_i\}$都是用有限小数表出的有理数，但该数列是无穷的，且没有循环位. 1995年，加拿大的两兄弟用计算机算出了π达42.9亿位，世界领先，但仍未到底，也无循环. 报导者风趣地报告了它的最后一位是“8”. 这就是说，$\{a_i\}$有理数列中任一可指出的项都不是最贴近π的有理数.

那么，“实轴上任一点（数）都可有无穷多个点列（数列）收敛于它”这一结论对于π亦然. 但须知，任一个非平凡的无穷数列（任一位后都有非0数者）所收敛的数都与该数列中任一有限项不贴近. 反之，任一实数不管是有理数还是无理数，实际上都只能经有理数列收敛于它. 可见任一具体有理数或无理数（实数）不与任一确定的有理数贴近. 同时一个无理数α若与另一无理数β贴近，则因收敛数列收敛值唯一，收敛于α的数列$\{a_i\}$必与收敛于β的数列$\{b_j\}$不同，因而两收敛数列间必存在一序号n，使得$i,j>n$时，a_i, b_j间不会相等，从而两无理数不可能贴近.

总之，我们算是对“任给一实数，不可能找出与其最贴近的实数”作了理解. 原来有理数集、无理数集以及有理数集与无理数集之并集（实数集），都是稠密集. 换句话说，上述讨论只是在“稠密”观点下来说的.

由此便可（直观）理解开区间的端点是什么状态了，不过这仅仅是一种“直观”.

比如［0,1）的右端点没有了确定的实数1，那么剩下的就是个左收敛于1的无穷数列，也是无穷循环小数$0.\dot{9}$，亦即我们看到的［0,1）的右端点应该是个动态的，有一个不断向右增长着小数位的数. 该小数一旦收敛了，即成为闭区间了，该端点也就成为稳定的静态的了.

注意到，至此稍作深入地看，我们对一点处的“直观”认识，实质上仅是在“稠密”的意义下进行的.

那么下面即从“连续”意义下作进一步的认识.

3. 任一实数的无穷小邻域都有不确定性：连续化

上述可见，对于任一实数，不可能指出它的无穷小邻域，因为一旦指定了一个认为很贴近它的（认为属于其无穷小邻域的）数，此两数立即都成为相异的确定数，从而其间必有无穷多个实数，因而不可能“贴近”. 从这种意义上说，这也是无穷小邻域内的一种“不确定性”，让人联想起量子世界的“测不准性”，同时更使人感到鲁滨逊在其“非标准分析”中取用的“单子”概念，其意义是何等的深刻.

"非标准分析"说明：一个实数点的无穷小邻域是不可能用数列表出或从实轴上画出来的.

正是鲁氏看出了，数的"连续性"问题是个"深层次"问题，必须对实轴的"直观"(稠密级世界观)作进一步升华、突破才有可能得到认识. 为此，鲁氏天才地(突破性地)命定了一个"单子"世界，一下子显示出无穷小邻域的许多性质来. 现在看来很明显了，实质上这就是数的"二象"结构观的突破(进一步的见第十一章).

总之，我们认识到，任一实数一经给定，最贴近它的实数是不可能在有限世界(或叫直觉世界、介观意义)的稠密"点"集观点下找出来的. 换句话说，那是个新层次的"无穷小世界"(空间)问题. 因此无穷小空间不只是个(实象的)"点"的问题(要说点也只能说是个具有"动态"本质的点)，而是个本质上不可忽视其"虚象"的"二象空间".

借鉴物理学亦知，既然微观物理学都少不了"二象"观，那么"微观数学"(点的邻域)更不可忽视其"二象"实质了.

第四节　实轴的结构欣赏

一、人类仅生活在 $\mathbf{R}_r$ 的子集上

首先我们问，今天的一个文盲会不会重犯两千多年前毕达哥拉斯的"有理数错误"？我们说是完全可能的，而且这个人还算是聪明人呢. 为什么？因为我们生活中遇到的数从来都是有理数. 其实，何况在生活中，即使在一切科学技术中也是如此呢.

比如，至今人们没有真正"得到"过一个无理数，哪怕是 $\sqrt{2}$，也只能是一种符号表示. 理论上它存在，但就是写不出来. 今天写不出来，将来也写不出来.

其实何止无理数写不出，即使诸如 $\frac{5}{7},\frac{2}{9}$ 等分数(算式)形式定义的数也不可能真正写出来. 原来这些数都是一种无穷位的小数，要延伸到无穷世界才可能得到啊.

那么，是否除了这些无穷形式的数(无理数)以外，人类生活实践(包括科技实践)都用上它们了吗？远非如此. 稍作回顾便知，实际上人类实践只用了两类有理数，这就是:

(1) 整数（无穷）集中的以 0 为中心的一个有限子集.

(2) 有限位小数的有理数子集，其小数位数一般只有两三位，科技中也只用到几十位.

因此可说，人类生活实践中用到的实数只有图 6.9 中的前几个层次，最多几十个层次的“有理数”，可见这些“有用”数的分布是非常稀疏、非常有限的.

注：在此，以数码为特征的信息科学蓬勃发展的信息化时代，能使世界偏平化、管理偏平化的数码、数字、数据“海洋”中的数已够多了，可它们仍然是些有理数，一般也只在几十位（十进制）之内，仍属十分有限的 $\mathbf{R}_r$ 子集啊.

也就是说，人类对实数集的认识，除了上述实践中“用到”的少得可怜的一个有理子集外，都只是理论上的问题. 人类之所以对实数集认识很困难，也许与此不可实际实现不无关系.

为何人类只用到那么一点点数? 为什么人们凡是技术实践性获得的数都是有理数，却推算出的数常常出现无理数，甚至超越数，包括很多“常数”都是无理数（如黄金分割数、自然对数底、费根堡蒙常数乃至宇宙常数、普朗克常数等）? 不能不想到，这些仅仅与人类测量活动的技术性（近似性）有关.

二、 $\mathbf{R}_r$ 与 $\mathbf{R}_I$ 的比较

在第一节谈到，理论上已经得知 $\mathbf{R}_r$ 是可数集，实数集 $\mathbf{R}$ 是不可数集，$\mathbf{R}=\mathbf{R}_r\cup\mathbf{R}_I$. 由于可数个可数集之并仍为可数集，可见 $\mathbf{R}_I$ 是不可数的，因此 $\mathbf{R}_I$ 的势为 $\aleph_1$，而 $\mathbf{R}_r$ 的势为 $\aleph_0$，所以显然 $\mathbf{R}_I$ 比 $\mathbf{R}_r$ 多得多，两者不可比拟. 亦即这个问题在理论上已经是圆满解决了的.

不过理论上解决了的，不一定都能理解，所谓“证明容易理解难”嘛. 但只有理解（从心理直觉上接受）了的事实才能上升为意识，才能有利于发展、创新. 这里即从“理解”的角度作一些认识.

事实上，粗略地直观反倒使我们狐疑. 比如我们生活上用到的都是有理数；有理数集 $\mathbf{R}_r$ 在实轴上的分布是稠密的，似乎已没有无理数的余地，以及人们已知的无理数并不多等现象，都使我们感到对上述理论的费解. 好在理智能不断提醒我们，应该相信理论成果，这才使我们致力于去探索更多的理论成果，以逐渐克服我们的心理差异. 这里再举几例.

例 2 费马曲线族上没有有理点.

我们知道费马不定方程 $x^n+y^n=z^n(n>2)$ 无整数解，它可化为二元不定方程

$X^n+Y^n=1$ 无有理数解问题，其中 $X=\frac{x}{z}$，$Y=\frac{y}{z}$．因此有图 6.10 所示的曲线

$$|X|^n+|Y|^n=1$$

或如图上阴影区中的实线（记为 L），把它叫做**费马曲线**．显然费马曲线族充满了图中阴影部分，它是一个开集，由 $n=2$ 时的单位圆和 $n\to\infty$ 时的正方形所界定．

于是费马大定理可叙述成“所有费马曲线上没有有理点”．

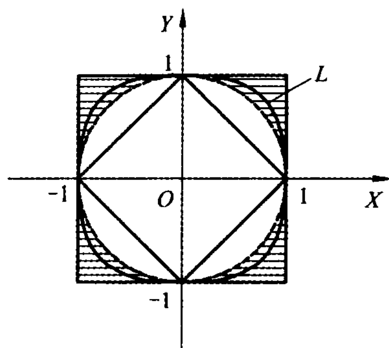


图 6.10

这里有理点，即 $(X_0,Y_0)=\left(\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2}\right)$，$q,p$ 皆为整数，当其中任何一个分量为无理数时，即不再是有理点了．

这点容易用反证法证明．设 $(X_0,Y_0)=\left(\frac{q_1}{p_1},\frac{q_2}{p_2}\right)\in L$，$(p_1,q_1)=1$，$(p_2,q_2)=1$（互素），则代入费马方程，有

$$\left|\frac{q_1}{p_1}\right|^n+\left|\frac{q_2}{p_2}\right|^n=\frac{|q_1|^n}{|p_1|^n}+\frac{|q_2|^n}{|p_2|^n}=1$$

从而有对 $\forall n\in N$ 皆

$$|p_2q_1|^n+|p_1q_2|^n=|p_1p_2|^n$$

则比如令 $x=p_2q_1$，$y=p_1q_2$，$z=p_1p_2$，易知，它们都是整数，此即与费马大定理矛盾了．然而实际上已说过，费马大定理已于 1993 年宣布得证，1994 年改正一点小错误后正式宣告得证，所以这里的假设 $(X_0,Y_0)\in L$ 是错误的，证毕．

由此可见二维实平面上非有理点何其多，从而不得不承认，一维实轴上无理点集 $\mathbf{R}_I$ 比 $\mathbf{R}_r$ 多得多．

例 3 实轴上 $m\mathbf{R}_r=0$，而 $m\mathbf{R}_I$ 为全测度．

首先可证明，实轴上可数集 $\{a_i\}$ 的测度

$$m\{a_i\}=\sum_{i=1}^{\infty}ma_i=0$$

这是因为本章“第三节、二”中已述及，任一点（几何点）的测度为 0，所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} ma_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0_i = 0$$

注意到这是无穷多个“0”的和，是确定的，为 0（用部分和序列（皆常数 0）的极限（不变）的结论可证），但应与无穷多个无穷小的和 $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i$ （ε_i 皆无穷小量）区分．后者是个未定式，究竟 $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i = ?$ 条件还不充分（尚不满足充足理由律），还要根据各 ε_i 的具体条件而定，它可能收敛到 0 或其他常数，甚至可能发散，在高等数学中不乏其例．

由此可见有理数集（可数集）$\mathbf{R}_r$ 的测度为 0，即 $m\mathbf{R}_r = 0$．

特别地，设 R_r^i 为单位区间 $[i, i+1)$ 上有理点集，则 R_r^i 是个可数无穷集，这时有

$$\mathbf{R}_r = \bigcup_{i\in\mathbf{Z}} R_r^i \quad （\mathbf{Z} \text{ 为整数集}）$$

可见 $\mathbf{R}_r$ 是可数个可数集之并集，而这时有

$$m\mathbf{R}_r = \sum_{i\in\mathbf{Z}} mR_r^i = \sum_{i\in\mathbf{Z}} 0_i = 0$$

所以可数个可数集之并的测度仍然为 0．

为方便计，现仅就一个单位长来讨论，记为 $R^0 = [0,1]$，则

$$R^0 = R_r^0 \cup R_I^0$$

由于

$$mR^0 = mR_r^0 + mR_I^0 = 0 + mR_I^0 = 1$$

称 mR^0 或 mR_I^0 为 R^0 上的全测度，则易知 mR^i 与 mR_I^i 抑或 $m\mathbf{R}$ 与 $m\mathbf{R}_I$ 皆系 R^i 抑或 $\mathbf{R}$ 上全测度．由此再次体会到 $\mathbf{R}_I$ 比 $\mathbf{R}_r$ 多得多．

例 4 康托尔三分集的测度．

上面谈到，可数集的测度为 0，不可数集的测度非 0，这是不是确定的规律？又，是否可反过来说，测度为 0 者皆可数，测度非 0 者皆不可数？回答是：后一问的后半问是肯定的，但其前半问的答复是否定的．因已述及，比如线段测度（一维长度）在平面上来看（二维面积）则为 0 测度，却它是不可数的．

至于前一问，其后半部的答复也是否定的，这里举出康托尔三分集作为一个反例（这时也是对问题的全部回答）．

所谓康托尔三分集，如图 6.11 所示，第 I 步将任一整线段三等分，然后去掉其中一个开段（为醒目，设去其中段）；第 II 步对剩下的两段（闭集）如法炮制．如此无穷下去，剩下的仍然是“闭集合”，叫它做**康托尔三分集**，去掉的“开集合”之并集叫做**康托尔余集**．

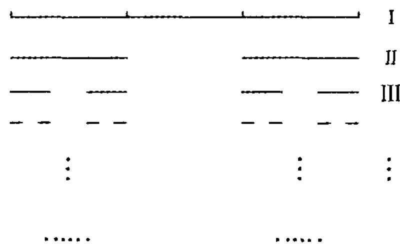


图 6.11

康托尔证明，康托尔三分集的测度为 0，但它是不可数的．可以这样来理解，每次分割后剩下的测度，依秩构成序列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$，当 $n\to\infty$ 后，自然其最终的测度为 0．但每次分割后剩下的集合一直保持为不可数集，其“势”的序列则是个 $\{\aleph\}$ 常序列，所以其极限（不变）也应为 $\aleph$，从而它的不可数性“在极限概念下（请注意这一前提）”则是可理解的．

三、人类的测量活动几乎都是不精确的

既然从可数性和可测性上都看到，$\mathbf{R}_r$ 比起 $\mathbf{R}_I$ 来少得多，那么（哲学地说，或叫“严格”地说）比如随机地从实轴上取出一点，则显然得到有理数的概率（几乎）为 0，而得到无理数的概率则（几乎）为 1．

但另一方面，人类生活中用到的数仅是 $\mathbf{R}_r$ 中小小一个子集，由此可见，说“人类生活中用到的数几乎都是不精确的”，不无道理．原来数学精确的根基却在我们生活的空间以外呐．

比如今天买回 1 斤 2 两肉，难到它就刚好 1.2 斤？买回 1 丈布，难道它就刚好 10 尺？当然就更甭说珠穆朗玛峰高 8 844.43 m，马里亚纳海沟深 11 022 m 等数字之不精确性和说全国有 13 亿人口的不精确性了．甚至说今天教室里有 50 位学生，难道精确？当然这些已属于别的“不精确类型”．比如应该是 50 位“平均学生”才精确，但“平均学生”如何得到精确也是问题（参见拙著《社会度量学原理》中“量不准原理”）．现在还是回到实轴上来．

既然任取一个实轴上的点，几乎皆为无理数，那么可说理论上对任一客观对象的任何一种量度值，也应该几乎都是无理数，这是合理的思维．可是，我们实际量出的值却总是有理数，这不能不说明，人类测量活动几乎都是不精确的．

其实这里“几乎”二字也只是就理论上严格意义来讲的，要是从实际意义来讲，则可以说完全是不精确的．因为造成人类生活用值的不精确性，至少有两大

关键因素:

(1) 客观值中无理数占绝对多数，这是已谈到了的.

(2) 测量能力十分有限，致使测量（映射）到的数无法绝对精确地表述其客观量. 也许只有巴黎存放的（被）定义成的标准值才是“精确”的. 甚至即使一个客观量是个有理数，我们测量到的有理数也往往是另一个有理数，仍导致不精确. 比如说目前世界上存在的大熊猫数是个确定的唯一的有理数，这是合理的. 但若说我们测算出目前世界的，亦即中国的野生大熊猫还剩 752 只，可否说这个数只是另一个有理数呢？根据一个真值（有理点）邻域内有“很多”个假值（有理点）的理论事实及概率论，可说这时几乎一定是另一个有理数，因而不是精确的.

这就是从实数的结构性质得到的对 $\mathbf{R}$ 的又一个认识.

第五节　实轴能认识透吗

在这个问题上我们是悲观论者，但也是实数理论的积极支持者、呐喊者. 我们认为即使对于整数的组合性质（数论）来看，也永远有课题可供探讨，何况还有更多谜底有待揭示[①].

本着“居中原理”，也许人类的认识只能永远徘徊于实轴这个高级无穷的世界之中. 因为我们认为:

(1) 如果实轴真能被认识透，那么一切基础学科包括数理化各类科学，均能使一切技术科学很快达到成熟和完善.

换句话说，我们的观点是，实轴认识、实数理论是一切科学的基础，这在今天已不是形容词，更不是哗众取宠. 如果讲述到此，读者还不能接受这一观点，想必是作者的失败了.

(2) 对无穷小世界的认识不能不说是一切基础学科共同的任务. 无穷小认识在实数理论中同样是个关键性难题，其难度和性质与连续统认识是同级别的、是彼此相关的，是宏观与微观的“二象”对偶问题，一个认识透了，另一个也会得到解决的.

(3) 当然也不能不承认，人类对实轴的认识，或说人类对无穷小的认识还是在逐步前进的，尽管说它步履维艰也罢、百尺竿头也罢. 不过得承认愈往后的每次新进步，都必须建立在对已有的“证明”成果的充分理解和直觉认识基础上，

① 当然比如至少已没有“无理数数论”了，这个问题已为高斯于 1830 年用“代数整数论”的方式考虑过了.

但这会是愈来愈难的，会愈来愈有“证明容易理解难”之苦．比如将会谈到的佩亚诺曲线、和田曲线或魏尔斯特拉斯的“点点连续、点点不可导例”等许多漂亮的数学理论成果，至今都还没有一个很好地理解，未被“感情”接受．如果老说“这就是数学的玄妙”，似乎谁都不能理解属于正常，也许并不正常，至少不利于据此继续发展．

特别地，在实轴理论上还存在更多难于理解和难于认识的结论，诸如已经多次涉及的稠密性、连续统、选择公理和诸多悖论现象等．

(4) 看来现行“实轴”概念将成为人们认识实数集的一个过去了的里程碑，好似牛顿力学对于宇宙学和量子力学，已成为历史纪念一样．看来实轴之“内”还有“轴”，实轴仅仅算是形象地“标识”出了“直观”意义下的实数集，但实数集远不止是直观世界的．已说过在这点上鲁滨逊的“鲁轴 $^*R$”（见第十一章）是一大突破．看来是鲁氏及时地认识到了实数集的深层（二象）本质，在理解实轴上比我们领先了一步．但是也将说明，似乎 $^*R$ 也还不能完全解决问题，仍有待继续突破．

(5) 我们主张接受量子理论的启示来观察实轴的无穷小结构，至少彼处“二象性”特征在此处应有所借鉴．如果说“有理”和“无理”这对二象性以及“实数”与“虚数”这对二象性，共两个层次的二象性已表明了实数结构中的二象性，那么它在实轴上（实数内在）的二象性表征在哪里？是不是“稠密”和“连续”？是否需要改换实轴模型甚至改进“鲁轴模型”，以更好地体现其“二象结构”？如果说实轴结构能够代表一维客观世界结构，它对我们认识真正客观世界有何启示？看来，这些都是值得思考的，留待后面继续讨论．

又，是否可以幻想某天出现一个绝顶天才，“推翻天地重组起”，另建一套数系，一改上述天堑为平夷？我们的观点是决然否定的．因为人类在实数认识上的困难是与大自然的结构本质一致的，或说是具有逻辑本质的困难，不是技术性的、不是表述方式上的、不是技巧上的困难．因而只要不脱离这个宇宙（改换逻辑规律）就不可能有异想天开的事产生．

人类科学已经走过来的脚步就是实在的、可靠的（在现有逻辑前提下，即在现有宇宙中），我们的任务应该是继续沿着前人的已经证明是正确的路子走下去，理解其机理、本质、原理，但不必轻易地就动手作技术上的重建．若这样往往会浪费时光．

第七章　加乘数学：代数学认识

在数学中，“代数学”与“分析学”十分不同：它们分属“离散数学”和“连续数学”两个“半边天”；分别都是其“半边天”的基础理论；两者也属于不同的“思维类型”，即代数学能力强的人不一定分析学也强，反之则反是．而且往往认为代数学比分析学更难，一方面是因为一般人的思维属连续型，更主要的是离散型更“活”（属组合复杂性），相应维数更高．同时，从队伍规模来说，搞代数的人也比搞分析的人少，笔者认为一方面是具“代数思维”（离散思维）特征的人少，另一方面是目前代数成果的应用还不如分析学的漂亮．

本章将表明，加、乘运算是整个数学中最基本且最为普遍的运算方式，同时在推广意义下容易看到，加、乘关系正是客观世界中最为普遍存在的关系；亦将表明，“代数学”是研究“加”或“乘”这一基本运算规律的数学，由加乘运算的普遍存在性，不难知道代数学的重要性和代数学（方法、理论、思想）在数学学科分支中存在的普遍性，以及代数学在其他科学领域应用前景的深远性．

由于读者对代数学已不甚生疏，我们不再取一般教材的顺序来认识，而是改换成一种综合的叙述方式．

第一节　代数学基本概念及其评述

这里所说“代数学”也叫做“近世代数学”或“抽象代数学”，为什么可以统一地叫做“代数学”呢？读完本章自会明白．

一、群、李群

正如第三章第一节介绍，“群”是这样一种集合 X，在 X 内定义了一种运算“·”（表加或乘），也就是 X 对运算“·”封闭（自然地，X 应含单位元和逆元），简记为 $G(X,\cdot)$，这里封闭、单位元、逆元概念见第三章第一节．若 X 不存在逆元，则 $G(X,\cdot)$ 叫做**半群**；若取“·”为“加”，则叫做**交换群**（或 Abel 群）；若取“·”

为 X 的置换，则 $G(X,\cdot)$ 叫做**置换群**，又叫**伽罗瓦群**（Calois 群）.

当集合 X 是连续运动轨迹时，产生的群叫做**李群**，或叫**连续群**. 这在“动力系统”理论中形成了一个分支学科.

“群”概念源自 19 世纪 30 年代伽罗瓦（Calois，法，1811—1832 年）证明有理系数多项式 $P_n(x)$ $(n\geqslant 5)$ 时无有限形式的根表达式（简称 $n\geqslant 5$ 次多项式无一般根①）. 他发现当 n 分别为 2, 3, 4 时 $P_n(x)$ 的根集合（X）对“$\cdot$”取置换（位置交换）时具有封闭性（每个置换集仍是原方程的根集合），但 $n\geqslant 5$ 时不再保持，后者正对应着 $P_n(x)$ $(n\geqslant 5)$ 无一般解的结论，前者即置换群（伽罗瓦群）.

最后请注意到 X 中的元素是什么？这点在定义中并未作任何限制，比如在置换群中 X 的元素即可以是一般集合. 例如，对点集 A，取 $X=2^A$，则显然它构成置换群 $G(X,\cdot)$，其中 X 的元素是一些点集.

例 1 比如自然数集 $\mathbf{N}$ 是半群；整数集 $\mathbf{Z}$ 是加群，去 0 后是乘群；有理数集 $\mathbf{R}_r$ 去 0 后是乘群；实数集 $\mathbf{R}$ 是加群，去 0 后也是乘群.

例 2 求证（特殊的 $n\geqslant 5$ 代数方程）$x^5-1=0$ 的解集（可以）是伽罗瓦群，并给出简单证明.

证明 首先设 $x_1=x_0^1$ 是其解，即有 $x_1^5=1$，则因有

$$x_0^2=(x_0^5)^2=(x_0^2)^5=1$$

所以 $x_2\triangleq x_0^2$ 也是其解；

同理，$x_3\triangleq x_0^3=(x_0^5)^3=(x_0^3)^5=1$ 及 $x_4\triangleq x_0^4$ 也是其解；特别地，$x_5=1$ 也是其解. 从而

$$G=\{x_1=x_0^1,x_2=x_0^2,x_3=x_0^3,x_4=x_0^4,x_5=x_0^0=1\}$$

为所给方程的一个解集合. 根据代数基本定理，G 即所求的全部解的集合. 进一步知 G 能构成一个置换群（即伽罗瓦群，亦即对 G 的元素给出任何排序（置换映射）后仍为其解集）.

注：（1）实际上 G 也是一个所谓循环群：集合中元素可由一个“生成元”的一切方幂来表出.

（2）事实上，直接解 $x^5-1=0$ 可有 $x=1^{\frac{1}{5}}=(\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}})^{\frac{1}{5}}$，取主根，即取 $k=1,2,3,4,0$，可分别得到解

$$x_1=\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}},\quad x_2=\mathrm{e}^{\frac{4}{5}\pi\mathrm{i}},\quad x_3=\mathrm{e}^{\frac{6}{5}\pi\mathrm{i}},\quad x_4=\mathrm{e}^{\frac{8}{5}\pi\mathrm{i}},\quad x_5=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$$

---

① 严格说，使多项式 $P_n(x)$ 为 0 的 x 值叫做多项式 $P_n(x)$ 的根，满足方程 $P_n(x)=0$ 的 x 值叫做方程的解，后者更广义. 这里约定在代数式 $P_n(x)$ 的意义下，根和解同义.

已能感知到，群概念的适用面必然是很广的．的确如此，比如对于社会、市场、企业，都不乏群的实质（这里免叙，留给读者思考）．不过，关键是用上群概念来描述后，要能有更多更为深刻的结论供应用，这才是它的意义，也才是它的生命力所在．

二、环与理想

“环”是这样的集合 X，其上同时定义加“+”和乘“·”两种运算，而且

（1）对“+”构成群 $G(X,+)$，自然也是 Abel 群；

（2）对“·”构成半群 $G(X,\cdot)$，即 $\forall x \in X$，必有 $x^{-1} \overline{\in} X$，或说 $x \cdot x^{-1} \overline{\in} X$；

（3）满足分配律：$\forall x_1, x_2, x_3 \in X$，有

$$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$$

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3$$

记环为 $H[X,+,\cdot]$ 或 $H[x]$．

若 $H[X]$ 中关于“·”有交换律，则称其为**交换环**．

若 $H[X]$ 中关于“·”有结合律，则称其为**结合环**．

理想，在 $H[X]$ 中若有非空真子集 $X^0 \subset X$，满足 $\forall x_1^0, x_2^0, x^0 \in X^0$ 及所有 $x \in X$，皆有

$$x_1^0 - x_2^0 \in X^0 \text{ 及 } x^0 x \text{ (或 } x x^0\text{)} \in X^0$$

则称 X^0 为 $H[X]$ 的左（或右）理想，同时满足左、右理想者叫做“理想”．

$H[X]$ 的理想 X^0 必是其子环，即 X^0 也是 $H[X]$ 意义下的环 $H[X^0]$．

“理想”概念是戴德金提出的，它是建立交换环理论的基础．

例 3　**Z**（整数集）是一个 $H[\mathbf{Z}]$，其偶数子集（记为 $\mathbf{Z}/2$）是 $H[\mathbf{Z}]$ 的理想．进一步，**Z** 的双偶数（4 的倍数）子集（$\mathbf{Z}/2^2$），乃至一般的 $\mathbf{Z}/2^n$（n 偶数子集）都是 $H[\mathbf{Z}]$ 的理想．

环论被认为是“代数学”的发祥地，它在数学中的地位十分重要．但“环”概念被认为很抽象，在应用上较为困难．不过，由于其运算及其满足的运算性质只需“赋予”，因而可以是近似的．这点给了应用以宽松条件．的确，比如一个现代企业，可否赋予它“环”的概念？特别地，企业的管理层（子集）是否就是它的一个“理想”呢？其实这些都是可以赋予的．问题还在于，赋予企业这一概念后能有多少既成理论和成果供使用呢？当前来说，这才是关键．

三、域、体、有限域、扩张域及 Bool 代数、格

对于交换环 $H[X,+,\cdot]$，若满足 $G(X\setminus\{0\},\cdot)$ 是交换群，则称 X 为**域**，记为 $Y[X,+,\cdot]$ 或 $Y[X]$.

当 $G(X\setminus\{0\},\cdot)$ 是非交换的（群）时，称 X 为**体**.

例 4 满足四则运算封闭的数集，如 $\mathbf{R}_r,\mathbf{R},\mathbf{C}$（复数集）乃至代数数集等皆是域，有理式的无穷集合也是域. 域中元素个数为有限数时，称为**有限域**.

任一有限域皆存在一个 p（特征、素数）和 n，使它与一个有 p^n 个元素的有限域同构（两域间元素和运算存在一一对应关系），有限域也叫**伽罗瓦域**.

若一个域 K 是其子域 $k\subset K$ 经过某种方式**扩张**而成的，则称 K 为 k 的**扩张域**. 比如代数数域即有理数域 $\mathbf{R}_r$ 的（代数）扩张域（系数取自 $\mathbf{R}_r$ 的一切多项式的根集所成的域）.

关于"Bool 代数"和"格"的概念，分别见本章第四节、三之 1 和第四节、三之 2 的例.

四、线性空间、模与代数

设有交换群 $G[X,+]$，K 是域，数乘运算 $\circ: K\times X\to X$ 满足：

(1) 结合律：$\alpha,\beta\in K, \alpha\beta\circ x=\alpha(\beta\circ x)$；

(2) 分配律：$(\alpha+\beta)\circ(x_1+x_2)=\alpha\circ(x_1+x_2)+\beta\circ(x_1+x_2)=(\alpha+\beta)\circ x_1+(\alpha+\beta)\circ x_2$；

(3) $\exists 1\in K$，$\ni \forall x\in X$ 有 $1\circ x=x$，

则称 X 为 K 上的**线性空间**，记为 $L[X,K,\circ]$.

当 $L[X,K,\circ]$ 中 K 为交换环时，称它为**模**，记为 $M[X,K,\circ]$. 当 $L[X,K,\circ]$ 中 X 为环，且

$$\alpha\circ x_1x_2=(\alpha\circ x_1)x_2=x_1(\alpha\circ x_2)$$

则称 X 为域 K 上的**代数**，记为 $D[X,K,\circ]$.

若 $L[X,K,\circ]$ 中 X 为结合环（即 $\forall x_1,x_2,x_3\in X$，有 $x_1(x_2x_3)=(x_1x_2)x_3$），则称 X 为 K 上的**结合代数**.

例 5 设 X 为一切 n 阶方阵的集合，K 为数域，则有 $D[X,K,\circ]$.

设 X 为实系数多项式集，K 为数域，也有 $D[X,K,\circ]$，且 X 是交换环时，称 $D[\cdot]$ 为**交换代数**.

张量空间（第四章）可构成代数，这是由线性空间变来的.[①]

五、张量代数

在第四章第一节、二之 3 中已谈到张量、张量空间、张量积，现在简要给出张量代数概念，为此引入：

1．外积与外形式

设 V 是实域 $\mathbf{R}$ 上 n 维线性空间，并设映射 $\wedge: V^r \to \Omega^r(V)$（概念见下面），满足 $\forall a_i \in V$（$i=1,\cdots,r$）及置换算子 $\sigma \in G_r$（r 阶置换群），若记 $\sigma(a_1,\cdots,a_r)=(a_{\sigma_1},a_{\sigma_2},\cdots,a_{\sigma_r})$，则

$$\wedge\sigma(a_1,a_2,\cdots,a_r)=(\operatorname{sgn}\sigma)\wedge(a_1,\cdots,a_r)=(\operatorname{sgn}\sigma)a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_r \tag{7.1}$$

σ 的符号函数

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}-1, & \sigma\text{ 为奇序}\\ 1, & \sigma\text{ 为偶序}\end{cases}$$

称 $\wedge$ 为 V^r 上的**外积**，或称为 r **重多线性交错映射**. 称 $\Omega^r(V)$ 为 r **阶外形式空间**，称（7.1）式右端为一个**外形式**.

2．外代数

对于上述 V 和 $\Omega^r(V)$，记 $\Omega(V)=\bigoplus\limits_{r=0}^{n}\Omega^r(V)$, $\Omega^0(V)=R$. 若再在 $\Omega(V)$ 上定义一个 $\wedge$ 运算，满足 $\forall\xi,\ \eta,\ \zeta\in\Omega(V)$，有

（1）交换律：$\eta\wedge\xi=\xi\wedge\eta, \eta\in\mathbf{R}$；

（2）结合律：$(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)$；

（3）分配律：$(\xi+\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge\zeta+\eta\wedge\zeta$， （7.2）

$\xi\wedge(\eta+\zeta)=\xi\wedge\eta+\xi\wedge\zeta$；

（4）反对称律：$\xi\wedge\eta=(-1)^{rs}\eta\wedge\xi, \xi\in\Omega^r(V),\eta\in\Omega^s(V)$，

则 $\Omega(V)$ 称为对于 $\wedge$ 构成**外代数**，记为 $D(\Omega(V),\wedge)$，又叫做 Grassmann 代数.

---

① 根据第四章对偶空间思想，对这里的 K 可以在一定的条件下赋予它对偶空间的意义，或说 K 是 X 的对偶空间在 R 上的投影.

3．反对称张量的外积$\wedge$

（1）设$\xi\in\Omega^r(V),\ \sigma\in G_r$，若$\sigma\xi=(\operatorname{sgn}\sigma)\xi$，则$\xi$称为**反对称张量**（$\operatorname{sgn}\sigma$表$\sigma$的符号）．

（2）对上述$\forall\xi$及σ，记$A_r(\xi)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in G_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\xi$，$A_r(\xi)$是反对称张量，$A_r$称为**反对称算子**．

（3）记$\Omega_r(V)=A_r(\Omega^r(V))$，则$\Omega_r(V)$称为**反对称张量空间**．

（4）设$\xi\in\Omega_r(V),\ \eta\in\Omega_s(V)$，定义

$$\xi\wedge\eta=\frac{(r+s)!}{r!s!}A_{r+s}(\xi\otimes\eta)\in\Omega_{r+s}(V) \tag{7.3}$$

则式（7.3）称为**反对称张量的外积**．

4．张量代数

记反对称张量空间$\widetilde{\Omega}(V)=\bigotimes_{r=0}^{n}\Omega_r(V)$，这时在$\widetilde{\Omega}(V)$上定义外积$\wedge$使之满足（7.2）诸式和式（7.3），则称$\widetilde{\Omega}(V)$对$\wedge$构成**张量代数**，记为$D(\widetilde{\Omega}(V),\wedge)$．

六、评述与注释

（1）以上定义用的是“命题式”叙述方式，即属“若满足××条件，则称为（叫做）××”型语句．当改其中“称”为“有”，则成为命题．此外，这些定义还可以改作“公理式”叙述方式，只要把定义中的前提条件叙述成条例式（公理组）即可．

（2）以上诸定义中我们致力于把各概念叙述成“赋予了适当机制的集合”这种格调，显然还可叙述成“在集合上赋予了适当机制的系统”这样的格调．读者容易判定出，两者是等价的．

（3）在本章及一般代数学著作中，“代数”的用语较为频繁，也较为灵活，有时仅表狭义的代数（一种特殊集合），有时则表代数科学．具体所指，根据上下文即能分明，这里仅此说明．

（4）当上述定义中所有X皆取数集（特例）时，所有内容则一下子变得简单多了．这时可分别叙述为：满足加减“二则”运算封闭或乘除“二则”运算封闭者叫做“群”；满足加减乘“三则”运算封闭者叫做“环”；满足加减乘除“四则”

运算封闭者叫做“域”；“满足加减运算且与数域 K 有数乘运算的向量集 X 为线性空间（实则特殊成‘向量空间’）”；“满足加减乘运算，且与数域 K 有数乘运算的向量集 X 叫做‘代数’”.

这是因为当 X 特殊到数集时，说到满足算术的某“则”运算时，相应各个运算“定律”即当然地得到满足了．但作为“抽象代数”，其元素已经抽象化，不再只是“数”了，即使在数学内，也常常用于诸如矩阵集合、多项式集合、方程式解集等的讨论．这时，其运算定律就得一一“赋予”、界定才行了，这时必然增加叙述的繁琐性．

（5）特别地，在“代数学”（即近世代数学）中，对于同一个基本对象 X，稍为改变一条“运算规则”都将产生一门新的学科分支，以致看起来有些繁复感，这是可以理解的．比如，只要对加或乘，或两者同选，或者（一个或两个）可逆，抑或（对乘的）是否可换等演算规则，任其一种都有其相应的特有性质，都将形成自己特有的一套内容，因而各自都对应着一门新的代数学科分支，特别在有 K 时还要加上一些对 K 的（比如取 K 为环或域的）要求，这就是“近世代数学”显得繁复的基本原因．正如所说，一旦特殊到“数集”上来，全都简便了．

*(6) 尚可见，群、环、域、体概念只依赖于集合 X 自身的某一则或几则运算，而线性空间和模、代数的定义则还要依赖于对（一般说是数）域或（数）环 K 的数乘运算，这里 K 正好像 X 的一个“对偶空间”在实轴上的投影．因此从这种意义上可说，线性空间、模、代数是具有“二象”结构的集合，而群、环、域、体等集合则只具有单（实）象．因此说，仅具单象者，其集合范畴不具生发性，而具有“二象”结构者能构成更广、更丰富的空间．皆因二象与单象的差异所在．

（7）有一个现象，由于“加、乘”是客观世界中基本关系，加上代数学中基本对象 X 的元素之“广义性”，“代数学”在客观世界的应用理应十分普遍．但是，至今似乎最为普及的只是计算，最为管用的倒是分析学．而代数学的应用领域主要还在数学内（甚至代数学内）的其他分支学科．代数学在对外应用中，面最广者主要还是“群论”，但也因其“单象”性，适应面虽广却用的深度似不如分析学来得漂亮．其次是“线性代数”包括线性空间、矩阵代数等，不过仍然主要是在理论上的应用．这些都是为什么？在第三节末将有一些理解．但毕竟说明，一门“应用代数学”的学科还有待进一步开发．

此外，亦将看到，除了上述种种“代数”概念都是建立在加、乘或其逆运算上这一事实外，还可说，哪里有加、乘哪里就可以建立“代数”．为此，下面将按加、乘的存在形式及代数学的发展途径来逐次认识代数学．

第二节　文字代数与符号代数

作为本节的序，先回顾一下数的概念．“数”可归为两大类：一类叫“数量”，一类叫“函数”．“数量”又可分为两类，即测度量和运算量．测度量一般带单位或单位制；运算量可分为带量纲（单位制运算而成）和无量纲两种．“函数”也可分为两类，即函数式和一般由函数构成的数学模型．

数量与函数的根本区别在于函数中代数符号分为量变、因变、参变三种名称，而数量表达式中即使由代数符号表示也不具有变数实质．本节第一段的数即数量，其他段的数即为函数．

一、文字代数

“文字代数”可作为中世纪及中世纪以前（16世纪以前），代数古典时期的特征，也可把它叫做“算术代数”时期，因为那时的代数也叫做算术．代数本来就是从算术发展来的．的确，比如那时的代数只相当于如今小学生解算术应用题时的一种“代数”技巧，无非在算术运算式中引入了一种简单的未知数表示而已，既没有函数概念，也没有自变量、因变量、参变量之分．比如，此期内最有名的代数学家（也叫算术或数论名家）丢番图（约公元3世纪左右）的墓志铭即可认为是当时一个典型的代数问题，它说

“此人生命的$\frac{1}{6}$为少年，$\frac{1}{12}$为青年，$\frac{1}{7}$为成年单身汉，婚后5年生一子，儿子活到他寿命的$\frac{1}{2}$时早他4年夭折”．

那么丢番图多少岁？可以说，这既是个算术题也是个代数题，或说是个可用代数方法计算的算术题．因此只要设其寿命为x，即有

$$x=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}\right)x+5+\frac{x}{2}+4=\frac{25}{28}x+9$$

从而$x=84$（岁）．但若不用代数方法（不设x）而直接作为算术题来做，就要困难得多，不妨试试．

即使一个不定方程(丢番图方程)中含有多个文字,也只是多个未知数而已.同时其解概念也往往限于整数解.

这一来，似乎“文字代数”告诉我们，代数就是用文字来代替数的运算，确是如此吗？其实这种解释即使在今天也并不全错，可以看到文字代数也是合符第

一节四中的“代数”本质概念的.

文字代数时期的又一特点是，当时还谈不上理论，它与算术一样就是为了计算，寻找计算技巧. 正如上例，代数运算本身也可说是作为算术运算的一种技巧而产生的.

二、符号代数

符号代数时期系指 16 世纪到 19 世纪末的近代时期. 特别在 19 世纪，符号代数还进入到了“高等代数”时期. 符号代数时期的特点是正式产生了**代数方程**理论. 不过既然是方程（含未知数的等式），那么不管是它的理论还是方法都应围绕着**解**这个中心任务，因此此期内代数的一大特点就是**解方程**.

据此也可把这一时期叫做“方程代数”时期，这里方程仅指代数方程，它是一种只含多项式或多项式分式（有理多项式）的等式. 其特点是式中已不只含未知数，也可含未定的“已知数”（叫做参数）.

当看到，一旦代数方程里含有参数，即产生了“二象”系统的完全空间(X,X^*)实质. 比如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 中作为参数的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所决定的空间即为 $\boldsymbol{X}$ 所在空间的对偶空间（即虚象 X^*），这是数学已有的严格意义下的对偶空间概念. 稍作推广也可把诸如一般多项式 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 的系数在参数意义下看成是 $(1,x,x^2,\cdots,x^n)$ 的一种“对偶变量”，这里仅用（对偶）“变量”而不说成“空间”是因为毕竟在已有的严格概念下它还不构成“对偶空间”. 于是在“对偶”意义下我们可以说“方程代数”的“解”理论，其实质就是探索**解空间**与其**对偶空间**的一种对应关系.

再从映射的意义看，比如对于多项式 $P_n(x)=0,x\in\mathbf{R}$，可视 P_n 为一个映射，记为 $P_n:X\xrightarrow{x\to P_{n(x)}}Y$，则所谓求解，即求 $x=P_n^{-1}(0)$（P_n^{-1} 表 P_n 的逆映射）. 从几何意义来讲，即求像值为 0 的原像集，一般叫做该映射的“核”. 显然由解的“表达式”$x=P_n^{-1}(0)$ 看出，核虽属于原像空间 R，但它是由 P_n 的对偶空间决定的，具体说是由来自对偶空间的参数决定了的.

最后再来解释一下，乍一看来，我们说的“方程代数”、“符号代数”包括“文字代数”以及通常说的“线性代数”、“高等代数”（统称经典代数）中的**代数**概念，似乎与第一节、四中定义的**代数**，以及“近世代数学”中的**代数**三者中两两都不一致，是怎么回事?

首先，顾名思义，所谓代数系指用符号代表数的研究，从这一意义讲，三者自然是一致的.

现在看看“经典代数”与“近世代数”的关系．原来把它们叫做代数，只是一种简称，实为**代数学**．亦即两者皆属一种学科，且都是在一定的系数域上按一定的运算规则在某种“集合”上作加、乘运算讨论；不同的只是“经典”和“现代”的差异，即研究重点、研究任务上的不同，前者在于运算技巧和方程“解”的研究，而后者在于加、乘运算规则和集合性质的探索，这种差别是因为前者仅在数的集合上进行，而后者是在“抽象”集合上进行．事实上容易看出，比如，近世代数中的线性空间和“代数”分别是在经典代数的线性方程组理论和代数方程（多项式）理论基础上推广、发展而来的．总之，经典代数和近世代数只有发展层次上的差异，可统一在一个“代数学”名称下，简称“代数”．

至于第一节、四中定义的代数，那是一种特指的集合．我们的狐疑仅在于为什么近世代数学在当初对这样的一种集合要取名代数（algebra）．须知，从英文名称上它既可译成代数学，又可译成代数，因此最容易与上述代数学简称的代数名称混淆？显然这不是定名者的疏忽，而是有意识的作为．实际上，仔细考察会发现这里“代数”（在数域 K 上有数乘运算的环 X）包含了代数学中最广的运算特征 X 中的加减乘及其对 K 的（数）乘等），至今如此．换句话说，近世代数中的群、环、域、体、线性空间等概念都可以作为它的特例来给出，因而可说这里的“代数”研究的确代表了代数学的基本特征．在下节也可看出，代数学在代数（集合）上的研究是最具代数学特征的，所以可认为当初把这样的集合取名“代数”是为了强调它在代数学中的典型性．

好在代数学的具体内容中，我们容易根据文义判知所提到的“代数”是指哪一种代数含义，不致混淆．

下面就符号代数学中方程式和方程组的多种类型做具体讨论．

三、方程式论

此即对 $P_n(x)=0$ 的讨论，可以进一步表为 $P_n(x,K)=0$，K 叫做参数域，是其（广义）“对偶空间”（即系数向量空间）在实轴上的投影，这里一般取作有理数域 $\mathbf{R}_r$．

1．数系的产生

（1）当 $n=1$, $K=\mathbf{Z}$（整数）时，

$$P_n(x,z)=P_1(x,z)=ax+b=0\ ,\quad a,b\in\mathbf{Z}$$

从而得到关于 $\mathbf{Z}$ 集的解集

$$X=P_1^{-1}(0,\mathbf{Z})=\mathbf{R}_r$$

亦即历史的当初，由此整数上的一元一次方程，得到了有理数域，从而说“该方程使 $\mathbf{Z}$ 扩张为 $\mathbf{R}_r$ ”.

（2）当 $n=2$，$K=\mathbf{R}_r$，有方程

$$P_2(x,\mathbf{R}_r)=ax^2+bx+c=0$$

这时，若 $\Delta=b^2-4ac=m^2(m\in\mathbf{R}_r)$，则解集

$$X=P_2^{-1}(0,\mathbf{R}_r)=\mathbf{R}_r$$

数系未得到扩张；若 $\Delta\neq m^2$ 但 $\Delta>0$，则

$$X=P_2^{-1}(0,\mathbf{R}_r)\subset\mathbf{R}$$

数系扩张“进入”了实数域，但尚未充满实轴，仅是产生了无理数；若 $\Delta\neq m^2$ 且 $\Delta<0$，则

$$X=P_2^{-1}(0,\mathbf{R}_r)\subset\mathbf{C}$$

数系扩张“进入”了复域，但未充满复域，只是产生了复数.

例 6 为了简明和直观，我们就 $ax^2+bx+c=0$ 中 $a=1,\ b=0,\ c=1$ 情形作一观察，并记为 $y=x^2+1$ 来讨论.

由于知道 x 可能在复域内，所以记 $x=x_1+\mathrm{i}x_2$，代入后得

$$y=x_1^2-x_2^2+\mathrm{i}2x_1x_2+1 \tag{7.4}$$

这时如图 7.1 所示，$y=0$ 的图像（复方程解）对应着复平面上 (x_1,x_2) 的双曲线 l_1，

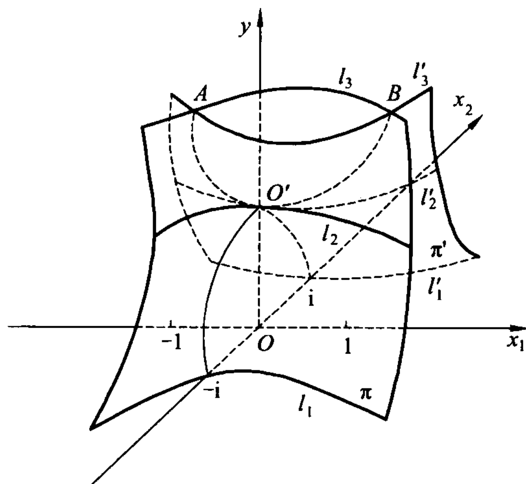


图 7.1

l_1'与x_2轴的交点，即点$(0,-\mathrm{i})$和点$(0,+\mathrm{i})$；$y=1$时的图像对应着切于O'的双曲线l_2和l_2'，其解为图 7.1 中 y 轴上的O'单位点．当 y 为大于 1 的常数时，式（7.4）有实根；当 y 为小于 1 的常数时，式（7.4）只有虚根．

一般地，当视式（7.4）中 y 为参变量来讨论

$$x_1^2-x_2^2+1-y+\mathrm{i}2x_1x_2=0 \tag{7.5}$$

的解，即解方程组

$$\begin{cases}x_1^2-x_2^2+1-y=0\\x_1x_2=0\end{cases} \tag{7.6}$$

方程组（7.6）的第一式为三维空间双曲面：$y-1=x_1^2-x_2^2$，即图 7.1 中双曲面π,π'．

下面讨论方程组（7.6）的解的情况：

当$y\leqslant 1$时，解系$x_1=0$与π,π'之交“点”（视 y 为常量）．这种点（对于参变量 y）的集合，即图中$-\mathrm{i}O'\mathrm{i}$抛物线．

当$y\geqslant 1$时，解为$x_2=0$与π,π'之交“点”（y 为常量）．这种点（对于参变量 y）的集合，即图中$AO'B$抛物线．

2．因式分解

当$P_n(x,K)=0$中，$n(\in\mathbf{N})$任意且$K=\mathbf{R}_r$时，问题进入到通常的**多项式论**，这时据代数学基本定律，对于$P_n(x,\mathbf{R}_r)$，有因式分解式

$$P_n(x,\mathbf{R}_r)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \tag{7.6$'$}$$

- 其中$\forall x_i\in\mathbf{C}$（实数域$\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$）．
- n个根中包括重根，复根必共轭．
- 从而有$X=P_n^{-1}(0,\mathbf{R}_r)=CD$（复代数集，其中实子集为实代数数集 RD）．亦即从实数系来讲，$P_n(x,\mathbf{R}_r)=0$使$\mathbf{R}_r$“扩张”到了 RD．从超实数系来讲，它使$\mathbf{R}_r$“扩张”到了$CD\subset\mathbf{C}$．
- $n\geqslant 5$时，并非$\forall x_i\in\{x_i\}$（解集）都能用有限的初等算式来表示出来．由此可见，$\mathbf{R}_I$（无理数）中能用根式表出者是少得可怜的，尽管能用根式表出的也是个无穷子集．
- 一般多项式的因式分解问题是无规律可循的，所以式(7.6)′只是理论式，一般不可技术实现，也因此至今“多项式论”没有多少成熟的内容可讲（远不如线

性代数丰富）. 但另一方面人们正好把它作为一种“因式分解原理”用于编码技术（利用分解因式的反问题），虽然今天它已受到高速计算机的挑战，不过仍未失去它的保密性能.

四、方程组论

1．线性方程组论

当 $P_n(x,K)=0$ 中，取 $n=1$，$x\in\mathbf{R}^m$，$K=\mathbf{R}_r$，P_n 为算子向量时，即成为线性代数方程组，改记为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B} \tag{7.7}$$

其中

$$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m, \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times m}, \boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}, \forall a_{ij}, b_i\in\mathbf{R}_r$$

• 不可讳言，线性代数方程组理论仍然是围绕着“解”而形成的，其内容已发展得很丰富，仅其大的分支理论也有线性空间、线性变换、矩阵理论以及行列式理论等，而且这些基本内容已为读者熟悉，兹不赘述.

• 应特别强调，线性方程组**模型**，因其简便、易接受、易操作，特别因其客观世界中广泛存在局部线性关系及近似的线性主部特征，致使线性代数理论、模型及其思想（线性结构）的应用十分广泛，且已成为每个科学工作者的必备能力.

例 7 表出式（7.7）在一般情形下解的结构.

为此设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_1' & \boldsymbol{A}_2'\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \boldsymbol{x}^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times m$ 阵，$\boldsymbol{A}_1$ 为 $m_1\times m_1$ 阵，且为 $\boldsymbol{A}$ 的最大满秩子阵；$\boldsymbol{A}_2$ 为 $m_1\times m_2$ 阵，$m_1+m_2=m$；$\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{B}_1$ 皆为 m_1 维向量；$\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{B}_2$ 皆为 m_2 维向量，则式（7.7）的解等价于 m_1 阶方程组

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{B}_1 \tag{7.8}$$

的解，其通解为

$$\boldsymbol{X}^1=\boldsymbol{A}_1^{-1}(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}^2)=\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_1^{-1}(-\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{x}^2\triangleq\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{X}^0 \tag{7.9}$$

式 (7.9) 表明式 (7.7) 的解集合等价于式 (7.8) 的解集合 $\boldsymbol{X}^1$，因而是式 (7.8)

的一个特解 $\boldsymbol{\eta}$（m_1 维）与其齐次式的解空间 $\boldsymbol{X}^0$ 的“和”，如图 7.2 所示．**注意：易知齐次方程组的解集 $\boldsymbol{X}^0$ 是个（m_2 维）线性空间，但 $\boldsymbol{X}^0+\boldsymbol{\eta}$ 所成的 $\boldsymbol{X}^1$ 则不再是线性空间，因为 $\boldsymbol{X}^1$ 无 $\boldsymbol{0}$ 元素，所以只能称 $\boldsymbol{X}^1$ 为一般的解集合（含 m_2 个参变量）.**

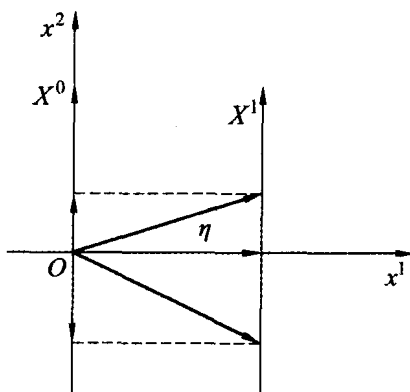


图 7.2

容易看到，正因为 $\boldsymbol{X}^1$ 不是线性空间，所以式（7.7）的每个解向量都仅只“箭头”落在 $\boldsymbol{X}^1$ 上，而“箭尾”（O 点）始终在 X 空间的原点，不在 $\boldsymbol{X}^1$ 内．

还要看到，虽说式（7.7）的解等价于式（7.8）的解，但两者的解的表示法还是有差异的，式（7.7）的解实为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}^1=\eta+\boldsymbol{X}^0\\ \boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}^2\end{cases} \tag{7.10}$$

亦即 $\boldsymbol{x}^2$ 在式（7.8）的解中是参变量，而在式（7.7）的解中却是自变量．

2．代数几何学（高次方程组论）

当 $P_n(x,K)=0$，取 $n>1$, $x\in\mathbf{R}^m$, $K=\mathbf{R}_r$, P_n 为标量算子或向量算子时，则产生了高维空间里由高阶代数方程组所决定的“解集合”上的理论，叫做“代数几何学”.

代数几何学，又叫代数函数论，它比线性方程组理论艰深得多，以至于搞代数几何的人被戏称为与魔鬼打交道的人．

对代数几何的研究起源于 19 世纪中叶，主要从几何学和代数函数论包括代数数论等抽象代数角度去作研究，所用工具比较高深，进展也较为缓慢，仅就其中一类 ζ 函数研究已够玄妙了（有名的黎曼猜测也出自此）．目前从事这方面研究的人不多．

当 P_n 为标量算子，$n\geqslant m=2$ 时，即产生**平面代数曲线论**．一般形式如

$$\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n} a_i x^i y^j$$

即使平面代数曲线（族）的研究也是十分复杂的．

当 P_n 为向量算子，$n\geqslant m>2$ 时，产生了**代数曲面论**．比如即使解

$$\begin{cases} a_1x^3 + xy + a_3y^3 = 0 \\ b_1x + b_2x^2y + y^3 = 0 \end{cases}$$

这样的代数曲面方程组也是困难的．从几何上看，这实质上是讨论两个平面曲线族交点（叫做结点）规律的问题．

特别地，当 $n=2$，$m=2$，P_n 为标量算子时，就是一般线性代数学中都要讲到的“二次型”问题．比较起来对它算是有了较好的认识，如二次型化到主轴上去的一套完整理论等即如此．

这里特别要提到一门也算新兴的“计算机代数几何学”，它是代数几何学的一门“硬”分支，是作为新兴学科“数学定理机器证明”的基础理论而发展起来的（续见第九章第一节）．

第三节　抽象代数

流行说法是，“抽象代数”也叫近世代数，或因其是当前代数学的主流学科而直接叫它“代数学”．而对于诸如符号代数中的线性代数、多项式代数（统称高等代数）等，则要在“代数”前冠以具体的限制词以示区别．

具体研究这一抽象代数的历史时会发现，所谓近世代数、抽象代数、代数学名称明显带有历史发展的时代特征．正好，若依秩以它们来命名，将整个抽象代数的发展分为这样的三个阶段来叙述倒是适宜的，下面即这样来讨论．

一、群与近世代数学

皆知，是 1831 年伽罗瓦创立的群论宣告代数学进入了它的新时期——**近世代数**时期，我们把 1831—1920 年这一时期叫做近世代数时期．此期内的发展内容主要有两个．

(1) 陆续产生了代数学的基本概念：群、环、域、体、线性空间、模、代数等等，及其初步研究．

(2)“群”的研究得到了充分发展，这也是近世代数时期的主要特征．它又主要表现为两个方面的特征：

① 群概念及其应用领域的发展．此期内迅速产生了置换群、晶体群、运动群、变换群、半群、连续群等实用背景很强的概念和理论，并迅速运用到编码理论、

晶相理论及动力系统等领域．同时随着代数学的发展，群概念在代数学中不断产生着可以统称为“代数群”的系列抽象群概念，并且群概念在数学内和理论物理中也有了更多的具体应用．比如正是群概念的应用使几何学深入到一个新的层次．

总之，群概念的深化及其应用研究的规模正越来越大，至今已在代数学中占了“半边天”，成为独立学科．根本原因是其背景空间宽厚，应用面广，这决定了它旺盛的生命力．其原因，下面还将谈到．

② 群理论的发展，可归结为三个方面的特色：

• 群的“表示论”研究．表示论是 Frobenius 提出的（1896 年），也是他提出的抽象群（将直观实在的群抽象化）思想的反问题，旨在用一些别的简明手段来描述（表示）群，从而便于研究．这一“手段”是寻求产生抽象群的变换群．群的主要表示方法是矩阵表示法，其次还有模表示、算子表示、置换表示、酉表示、线性表示等．顾名思义，矩阵表示即将一个群转换成矩阵形式来研究．在矩阵表示下，特征标概念（矩阵的迹 $\mathrm{tr}(A)$ 引伸出的一种不变量）也是很重要的．

• 群“结构”的一般研究．主要是按代数同构概念对给定阶数的群进行分类的研究，这是十分重要的．因为即使有限群，其状态也是繁复的，为寻找其规律，对其分类是个重要途径．有趣的是完成无限群（无穷集的群）分类“反倒”先于有限群的分类．有限群的分类，关键在对其基本的有限单群（不再含子群者）的分类．可以说是经历了 150 年之后才在 1981 年，解决了有限单群的分类问题．人们将此事件誉为 20 世纪内数学最大事件之一，也是近世代数以来最大的事件之一．

• 伽罗瓦理论．伽罗瓦不仅创立了群论，实质上也建立了有限域理论，从而形成伽罗瓦理论，因此说伽罗瓦理论是超出其群概念，向着代数学纵深发展的理论．由于伽罗瓦早于 1832 年 21 岁时已因决斗而去，他的理论主要是后继者作的，首功当推戴德金．是戴氏提出的“理想”概念和给出的“交换域”概念形成了伽罗瓦理论，也是他给出的“交换环”理论推动了伽罗瓦理论的进一步发展，保证了该理论即使在“抽象代数”时期也能占据一个重要的理论地位

二、抽象代数时期：环与广义超复数系

“抽象代数”时期，系指 20 世纪 20 年代开始的二三十年内的发展时期．这是近世代数学或说代数学理论发展的高峰时期，此期内的特征主要体现在**两大学派**上：一个是“一”中提到的由戴德金开创的伽罗瓦理论的继续发展．另一个则是由著名女代数学家 Emmy Noether（德，1882—1935）创立的**抽象代数**学派．这是因为她在 20 世纪 20 年代初提出了标志着“抽象代数”时期到来的一系列概念，

诸如代数同构、剩余类、右（左）理想、直和等，并证明了**代数主定理**：代数数域上每个中心单代数都是循环代数．这时所提到的概念往往是由群环域层次上的基本概念经过了提升或再提升而成的，不便三言两语作出交代，但也无恙于本书宗旨，所以这里仅提及为止，不再作深入介绍．

对“抽象代数”贡献大的名家不少，但有两位不能不提及，一位是范德瓦尔登，另一个是 E.Atin．前者最有影响的贡献是其名著《抽象代数学》(1930 年)，现已出过多版，至今仍是这方面一部好的专业基础读物，对宣传普及和推动代数学发展功不可没；后者的贡献是多方面的，主要有有限域代数扩张、类域论研究，还推广了高斯互反律而得到一般互反律，特别还创立了代数学“编辫论”．

抽象代数的抽象性正合布尔巴基（学派）特征，受到布尔巴基的赞赏是自然的，甚至 Noether 也被认为是该学派开创者之一，Atin 也是其热心支持者之一．

关于“抽象代数”时期的理论特征可举出三点：

(1) 环在抽象代数中的重要地位．

从实用角度看来，“环”概念在代数学中似乎没起多大作用，其实不然，原来它在代数学的高峰理论“抽象代数”中起着相当关键的作用．这点可举两例以明之．一个是伽罗瓦理论的发展是建立在**交换环**理论之上的；另一个是 Noether 抽象代数是在**结合环**基础上产生的，具体说是通过结合环而发展成她的**结合代数**的．环还是**代数几何学**不可少的工具．

特别地，还看到了环理论中一个重要概念—— 理想（见第一节、二），它的提出（戴德金）也是十分重要的贡献．

(2) 超复数系．

这本是 19 世纪的事（不属本段 20 世纪 20 年代以后的“抽象代数”），但为介绍下段的广义超复数系，这里也介绍一下．

已经知道，通过算术和简单的符号代数即可得到数系的发展过程：

$$自然数\ \mathbf{N} \to 整数\ \mathbf{Z} \to 有理数\ \boldsymbol{R}_r \to 无理数\ \boldsymbol{R}_I \to 复数\ \mathbf{C}$$

后者叫做复数系，又叫复数域，或叫可除代数（满足乘法可逆的代数）．**C** 称为**代数完备数系**，因为一切代数方程的根都在 **C** 内；一切代数理论中用到的数量范畴也在 **C** 中（将看到，根本的还在于 **C** 是具备“二象”结构的“完全空间”）．事实上已经谈到，数学的许多理论还必须建立在 **C** 上，但是毕竟作为代数研究的对象不能停留于“数”的 **C**，必须适应客观需要而发展．换句话说，需要产生超复数系．

比较起来可以说，产生复数系还算是容易的，因为它在求解 $ax^2+b=0$ 时会自然地提示我们去创造一个“虚数”概念，从而容易得到复数系．但至此容易误认

为事已止步，因为从符号代数上没有新的“提示”了．殊不知，哈密顿在 1843 年突发灵感：由于有“二元数”的表达式

$$x+y=(1,1)(x,y), \quad ax+by=(a,b)(x,y)$$

等，自然可有复数的表达式

$$x+\mathrm{i}y=(1,\mathrm{i})(x,y)$$

因此可叫复数系是**二元数系**，把 $x+\mathrm{i}y$ 简记为 (x,y)（但不要看成二维向量空间，这里的来得更为深刻了）．由于其各分量都是实数，因而称它是建立在实域上的．

那么，他从这一形式的改变得到启发，是否还有同样建立在实域上的三元数系、四元数系……n 元数系呢？

人们说，提出问题比解决问题更难，也更重要．的确，哈氏很快即证明，**没有三元数系了，但有四元数系**．具体说是**四元可除代数**（又叫广域），记为 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$（后来被推广成一般的线性结合代数形式），这里 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，这时关键在于界定其运算定律．比如哈氏取 1 为单位元后再取乘运算为

$$\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{j}^2=-1, \mathrm{k}^2=-1, \quad \mathrm{ij}=\mathrm{k}, \ \mathrm{jk}=\mathrm{i}, \ \mathrm{ki}=\mathrm{j}, \ \mathrm{ji}=-\mathrm{k}, \ \mathrm{kj}=-\mathrm{i}, \ \mathrm{ik}=-\mathrm{j}$$

即成功了．不过这里乘运算不满足交换律，只满足结合律．总之，四元数系即在不满足交换律的意义下得到了[①]，叫它做**超复数系**．

进一步，又为 Frobenius 证明“**没有 R 上的四元以上的有限元的数系了**”，同时尽管比如四元数域（实为体）在现代信息学上也有一些应用，但较之二元数域来，大为萎缩了，在理论和应用上都变得十分有限了．

那么数学的发展还有没有别的路子呢？也许会想到，若把上面建立数系时用到的“对偶空间”的投影域 $\mathbf{R}$ 改作复数域，还可能得到进一步发展．这不失为一条创新思路，但难度是可想象的（留给有兴趣的读者）．

这里继续介绍数学在“超复数系”基础上的进一步发展之路．

（3）广义超复数系．

既然在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的超复数系发展到非交换广域似乎已到尽头，人们自然想到，要能得到进一步的发展只有在条件上作出让步了．

首先则是对于数系不一定要求广域（可除代数），比如只要求为代数，或者环、群等代数系统即可．

其次是为了建立更多的代数系统，将过去研究的“数”对象放宽成一般对象，

---

① 这就是代数学上第一次遇到不满足交换律的情形，为此他想了 15 年才突然悟到“不满足交换律就是一个性质嘛”，从此非交换代数即成为正常而越来越丰富的理论了．

这就是**广义超复数系**的思想发端.

最后通过对元素的抽象化、广义化，把代数对象扩张到了非单一的数或变数情形，至少可为函数曲线、多项式、矩阵等，也可以是方程的解、运动体等等对象，以寻求广泛的代数系统，不必再局限于广域.

结果效果十分显著，很快产生了一系列新的代数系统. 据说至今已有 200 多种代数系统，因此不能不说广义超复数系的思想突破是代数进入其“抽象代数”时期的关键.

特别地，第一节中各基本概念的定义正是本着今天的抽象代数精神和抽象代数的需要而作出的“抽象”定义. 具体说，为使所定义的群环域等概念能满足抽象对象下的代数理论需要，在它们定义中的运算定律往往来得比数字对象的更复杂.

三、代数学时期

我们已经谈到，作为集合的“代数”概念与代数学，具有本质上的共性. 特别地，还可把群、环、域、体乃至线性空间、模等都视作“代数”的特殊情形. 所以说把整个古今代数知识，包括经典代数、近世代数和抽象代数，都归于一个**代数学**名称下也是合理的. 不过本段说的“代数学”一般仅指当前主流学科“近世代数学”和“抽象代数学”.

“代数学”时期一般指 20 世纪中叶以来，也可说第二次世界大战以来，或以范德瓦尔登的《抽象代数学》第四版定名为《代数学》(1950 年代) 开始的.

“代数学”时期的特征主要表现为,已有的代数学主要理论已过了它的高峰期,这时在抽象代数继续发展和成熟的同时,更表现为对其他学科领域的迅速渗透.具体表现为以代数为特色的边缘性学科和应用学科的不断出现，比如在数论上有代数数论、代数几何和代数函数论的进一步发展，并分别形成学科. 此外在代数拓扑上，包括同调代数、代数 K 理论以及算子代数、张量代数、逻辑代数、李代数等，都是已经形成学科或成熟方向的分支领域. 进一步，代数学与泛函空间、一般拓扑空间结合的边缘分支和方向也已不少. 特别要看到，这还仅仅是“代数”概念的渗透，作为“代数学”的概念还有多种，尤其是“群”概念的应用与渗透之广泛性，更是常人皆知的，不必枚举，也不胜枚举.

“代数学”在其他科学的迅速渗透也是代数学时期的一大特征. 比如在理论物理中即有多种代数学概念的产生，如 Racah 代数、Lorentz 群、广义旋转群、重正化群等.

在代数学中，运用最广的是“群”和“代数”概念，其次是“线性空间”概念．群与代数之间又以前者为最．这不仅因为从概念上说有代数必有群，反之则不一定，更重要的还在于，事物间加、乘关系的同时存在虽然普遍，但只存在其中一个单一关系者更为普遍．至于“线性空间”概念的运用特征，更在于它在多元函数的线性分析中具有具体的简便而容易普及的数学模型，实现了“算术化”的定量讨论过程，因而适用面宽，运用效果好．再从宏观讲，线性空间模型最简单，容易掌握；但从局部分析讲，它抓住了“线性主部”这一主要矛盾，近似程度亦高．

四、复数的实质及在数学和代数学中的地位

人们已熟知，复数的“功能”比实数强，有许多数学问题在**R**中难以解决，一旦拿到**C**中即变得能够、甚至容易解决了．广为人知的例子比如代数基本定理的证明即如此．实际上本节已经表明，复数系是一切数系中最有用的、最大的数系（虽有四元数系但功能最为萎缩），这点可从理性上说明它的“功能”为什么比实数系强，但我们仍然对它“理服心不服”，总希望能稍作直观地接受这一事实，本段即在于此．

1．虚数的旋转特征

这点已成为常识，比如（见图 7.3）在复平面**C**上，当单位实数 1 乘以单位虚数 i（受 i 的作用），则 1 从实轴正旋$\frac{\pi}{2}$至虚轴，但模长不变．若再用 i 作用它一次，则再正旋$\frac{\pi}{2}$至实轴的 -1，模长仍不变．若再作用以 i，则旋至虚轴的 $-i$，如此旋转可以周期不矣．

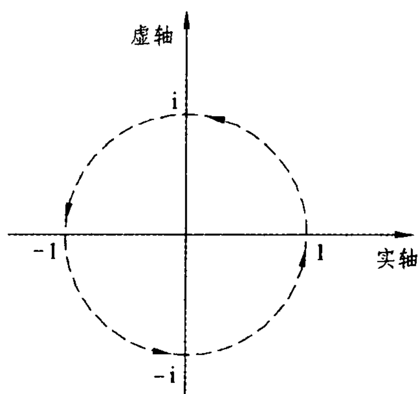


图 7.3

可见虚单位数 i 的作用是以$\frac{\pi}{2}$为单位的正向旋转变换，那么能否使之产生连续的（又叫基数性的）旋转变换？历史上早已回答，是可以的．这就是指数函数 e^{iz} 的功能，亦即欧拉公式

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \tag{7.11}$$

所表出的特征（其证明可代入三项分别的幂级数式立即可得）. 比如式（7.11）中 z 取 $\frac{\pi}{4}$，则 $e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，正好在图 7.3 中单位圆第一象限的 $\frac{1}{2}$ 弧上，如此等等.

总之欧拉公式（7.11）充分显示了虚数的旋转特征，或说显示了虚数的周期性.

例 8 有如下的莱布尼茨悖论：

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\int_0^x\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)dx=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-x}{i+x}$$

令 $x=1$ 得 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，但这时上式中有

$$\frac{1}{2i}\ln\frac{i-1}{i+1}=\frac{1}{4i}\ln\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2=\frac{1}{4i}\ln(-1)=\frac{1}{8i}\ln(-1)^2=\frac{1}{8i}\ln 1=0$$

可见 $\frac{\pi}{4}=0$.

此谜直到欧拉指出复指数函数的周期性 $e^z=e^{z+2k\pi i}$ 后，比如这时 $1=e^{2k\pi i}$，才看到了问题得到解释的希望.

关于复数的周期特征将在第八章第二节进一步谈到.

2．复数与运动的对应关系

我们知道一切运动（记为 S）皆可分解为平移（记为 S_r）与旋转（记为 S_i）之复合，即

$$S=S_i\circ S_r$$

恰好一个复数 z 等于其实部 z_r 加虚部 z_i，即

$$z=z_r+iz_i\triangleq z_r\circ z_i$$

这时我们看到如果把复数的实部用来对应运动的平移量，虚部用来对应运动的旋转量，是没有矛盾的. 那么由运动的自然特性（运动是物质世界的存在形式）和复数的逻辑特征（系逻辑运算下必然产生的），不能不提醒我们：

复数有着它“完全运动”的或叫“运动完备性”特征，而它的实部与虚部分别只能代表一种不完全的运动. 这就可以理解，为什么复数的“功能”比实数强，也可以理解复数域在数系运算中的完备性了. 当然，进一步还可从“二象”论高观点去理解，那就更为深刻了.

例 9 为什么对电磁波的研究必须运用复变函数工具?

这是因为电磁波理论少不了振动，或说是以旋转（或说周期）运动为主要形式的运动，因此少不了需要表征旋转特征的数；否则从欧拉公式（7.11）看出要用非旋转特征的实数去表征具有旋转特征的虚数只能用无限形式（无穷级数），那是多麻烦的事！所以说必须用复变函数这一工具．

显然一切振动对象的研究都少不了复变函数工具，比如当前热门之一的小波分析也是如此．

特别地，对微观世界和量子理论的研究也少不了复变函数工具．因为量子世界少不了运动，且有着与天体一样的（作“分形”对应的）自然运动，其固有速度很高．由于是在微观世界，必然旋转，且曲率很高，所以这时必须用复变函数工具．

物理学界说，“理论物理在 19 世纪的伟大发现是复平面”，为什么？现在应该明白了．

理解了复数旋转运动的本质，将有利于我们更加主动自觉地在自己的专业领域去运用和掌握复变函数工具．

3．复数系是代数的完备系统

这里的“代数”系指符号代数，“完备”系指一切代数方程的解集合（代数数）不超过复数系．由此可看出，这时若要突破复数系来研究，那就既不可再作为代数方程解的集合来研究，也不必再以数作为其元素了．由此不难理解从复数系到超复数系乃至于广义超复数系需要有多么大的思想突破，同时也不难理解，“抽象代数学”的产生在那个时代是在所必然．

4．复数的进一步认识

据“二象论”，复数集 $\mathbf{C}$ 的元素（$c=x+\mathrm{i}y\in\mathbf{C}$）具有典型的“二象”结构，所以它具有（代‘数’运算的）“完备性”和更多的“功能”都是自然的，但更为复杂．这启示我们，需要有意识地注意到数学中的“二象”实质，尽管它会更复杂，但“二象”才是本质．因此比如可否把坐标系各轴看做“二象点”（而不是实的几何点）构成的，并在这样的坐标系上来建立数学？可否把（建立在实数域上的）“实分析”复数化？如此等等．

注：相应的虽然还有“四元数体”，但其范畴大大缩小了、结构更简单．今天的信息科学中虽也用到“四元数”，但那不是“数体”上的运算．同时，这时的“四元数体”既不是个“多层”的二象结构，也不是个“复合”的二象结构．

五、代数学特征的再认识

我们看到了，代数学中的基本概念（如第一节中谈到的）在产生之初其实际背景还是比较实在的，后来即变得愈来愈抽象了．这是因为作为这些基本概念的原旨只是针对（字母表示的）数的集合来建立的，但数集合的代数系统是有限的，其中有实践意义的只能达到复数系，理论上最多也只能达到超复数系的四元代数系统（即四元数系）．因此这时想要进一步扩大代数系统，就只能借助于广义，也就是更为抽象的超复数的代数系统（即广义超复数系）了．这就进入了真正的、抽象的代数学时期，因而，“抽象”是代数学的主要特征．

（1）抽象代数系统的对象更抽象．

这里所谓“抽象”实与“泛指”近义，即其对象集合的元素不只是代表简单数字的字母，而且至少可以有如多项式、矩阵、微分方程的解曲线等作为元素，甚至还有超出这些对象的从而是更为抽象的对象作为元素（关于这点，还有待从其抽象的公理化定义中去继续探索）．

（2）抽象代数系统的建立更难．

首先，从超复数系到广义超复数系思想的突破是不容易的，足见其困难性了．其次，已知代数学属于“离散思维”，因而有其“离散型”思维的困难性．再则，一个抽象代数系统的建立，意味着必须对其加、乘运算及其相应定律作出界定，以形成一套描述该代数系统的公理体系．但皆知愈抽象的对象所适应的范围愈广，因此愈抽象的代数系统自然有着愈广阔的背景空间．所以在界定这样的抽象代数系统时，其加、乘运算及其运算定律就得充分考虑到广阔背景空间的实际限制，较之在纯粹数值集上来建立相应概念，自然更难，但也更有意义．比如当年哈密顿在四元数系上虽经 15 年才第一个提出（乘法）不可换定律，但立即发现比如矩阵乘法即一般不满足交换律，于是至少对于以矩阵为元素的代数系统，存在不可换问题，从而很快产生了不可换群、不可换环、不可换域、不可换代数等，以及左（右）理想之类的一系列概念．

（3）抽象代数系统的理论更难．

既然抽象代数系统的思想突破和系统建立很难，那么概念建立起来之后，要考察其内在规律自然也是不容易的，这点也已为抽象代数学的发展经历所证实．比如 Noether 证明代数主定理，Atin 证明一般互反律等都是如此．特别地，目前搞抽象代数学理论的人，包括代数数论、数的几何之类方向的人并不多，其原因之一也在于难度大；另一方面则是如下的原因．

（4）一点启示．

从已有的事实来看，虽然理论上说抽象代数系统愈抽象其适用范畴就愈广，

但事实却是尽管代数学已有丰富的应用，但真正能将全套系统模式和理论成果完整地运用到某个对象上的并不多，常常只是针对具体问题的需要，重新建立具体的代数系统，然后再具体探讨其内在规律．诸如数学中的拓扑代数系统、量子力学中 Racah 代数系统、用于柔性加工理论的“大代数”以及实践中各种各样“群”概念的提出及其研究，都说明了这点．

因此我们应该作为一个动向来关注，并应该作为一个方向来鼓励，今后的代数学应用，应该注意从具体背景或实际背景去直接构建“代数系统”，然后作针对性的研究而不要奢望一个死的代数式，套上即成功．实际上这一动向已经在“代数学时期”表现出来了，亦即那种仅热衷于坐在屋子里作公理化研究的做法在“抽象代数”时期即已经过了它的高峰期，以后则因其理论的困难性、成果应用的非扣合性和实际的需求性，更加促使它从应用背景出发去研究．这点很类似于已谈及的多项式微分系统—— 极限环理论情形，当它进入所谓“3 次系统”和更高次系统后，要想从理论上去“全面”地解决问题已经很难，因此这时的理论不得不变成针对实际问题提升成的具体模型来研究．

注：鉴于加或乘在广义（或叫抽象）意义下的广泛存在，不难理解和相信社会系统、社会经济、管理科学中也存在着深刻的然而是独特的代数学模型，但不一定是代数学中现成理论能扣得上的，需要作创造性应用，请读者试试．比如，从一场舞蹈表演到一个社会的演化过程，既可在适当意义下表为一个连续群，也可在适当意义下化为置换群，总之都是需要赋予条件的，也是近似的．

第四节　加乘概念的扩展

前面是从数字对象和（一般的）抽象对象出发，考虑了它们的代数系统中加“＋”乘“·”运算及其定律、规则．显然，作为“加乘数学”，其加乘概念远不止此，那么现在即谈谈加、乘概念的其他情形以及相应的代数系统．

一、加、乘：线性与非线性的实质

悉知，如果一个（一元或多元）函数是多项式的，且各项的自变量指数之和最高为 1（即 1 次项），则把它叫做线性函数；否则，一旦函数式中含有一个非 1 次项，该函数即叫做非线性函数．这也包括非多项式函数，因其泰劳展式必有非 1 次项之故．现分别讨论之．

1．线性函数与线性独立

例如，一个运输企业 Y 有 n 辆汽车 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，那么 Y（在单位时间）的收入（记为 Y_s）可表为

$$Y_s = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{7.12}$$

这是个线性函数，其系数表示各自的贡献率，a_0 可以为 0 或负数，比如可表企业的定常支出等．这时则说（企业内）各车之间的关系是线性的．

特别地，所谓“线性关系”的本质就是“独立关系”（又叫线性独立），因为这时任何一辆车的“贡献”大小和有无（即其系数取正负、大小及是否取 0 等）皆与别的车无关．

2．非线性函数：交叉项与合作关系

设产品 z 系由元素 x 生产成，即有映射 $z = f(x)$，可简单地表为一元线性函数

$$z = f(x) = ax$$

但为了深入则需作进一步分析．若这时发现贡献率 a 不是常数，而是一元素 y 的函数，为简单可表为线性函数

$$a = a(y) = by$$

从而有

$$z = a(y)x = byx \tag{7.13}$$

这是个**二元**（单项的）**非线性函数**．该单项系不同变元的乘积，叫做**交叉项**．

特别地，交叉项对应着“合作”关系，这里即 x 与 y 的合作关系．其特点是，贡献大小完全依赖于合作双方，任一方的改变都将影响到总体效果，甚至当任一个取 0 或负（不参与或捣乱）效果会为 0 或负．

3．一般非线性函数

一般非线性函数常常是既含线性项又含非线性项者，亦即既有各元素的独立贡献项，又有相互合作的贡献项．特别是其“合作”方式可有很多，随多项式阶的上升而（呈组合数地）增加．一个形象例子是：用两个固定形式的左右手，分别撮米，其米量（记为左、右）之和必然小于合起来撮的米量（记为合），那么这多出的部分（记为“a 左右”）即是其合作效果，亦即有表达式

$$合 = 左 + 右 + a\,左右$$

注意到同一式中的符号应表同一量，所以交叉项中需要引入个调节系数（这里即a，注意到“调节”的含义是深刻的）才行.

此外，含非代数式函数项者，该函数常常也是一般非线性的.

再则，如果有这样的非线性函数，其中（或泰劳式中）没有交叉项，这时各元素间也是独立的，叫做非线性独立，不过应用中这种情形较少.

二、点乘与内积，叉乘与外积

关于点乘、叉乘概念，已为读者熟悉，系指向量间的乘运算，它是高等数学中广为运用的概念，这里只强调三点：

(1) 叉乘的方向为何用“右手系”来确定？这从数学来说是“定义”的，即“公理”式命定的. 但它也不是盲目命定的，而是依据物理学上多种场涉及的方向性皆具有的“右手系”规律来定义的. 比如电磁场间的方向关系即是右手系的，虚数的旋转特征也是右手系的，据说自然界一切自然流体的自然涡旋都是右手系的. 所以，如果数学把叉乘方向定义成左手系了，则数学用于实际时将经常要加上个“－”号才能与实际相合，多有不便. 此外也当看到，这种定向方式仅在$\mathbf{R}^3$（牛顿空间）中有效，当$n>3$时即难确定了.

(2) 在高等数学中，具体说是在解析几何中的点乘、叉乘只是对$\mathbf{R}^3$来介绍的，但是只有点乘“·”容易推广到$\mathbf{R}^n$情形，叉乘则不行. 这是因为“·”的代数表达式易作推广的缘故. 比如设$x^1,x^2\in\mathbf{R}^n$，有

$$x^1\cdot x^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^1\cdot x_i^2$$

特别地，点乘还以“内积”这一等价名称推广运用到线性泛函中对偶空间（见第四章第一节）和希尔伯特空间中（第十章第三节）. 然而对于叉乘“×”却不那么容易了，比如仅对于$\mathbf{R}^3$才有确定的、同时也是简便的行列式的表示法，即使计算“×”的三角表达式

$$x^1\times x^2=|x^1|\cdot|x^2|\sin\theta\ （\theta 为其夹角）$$

也不容易，需要从“·”的三角式

$$\cos\theta=\frac{x^1\cdot x^2}{|x^1|\cdot|x^2|}$$

中去获得θ（$=\arccos\dfrac{x^1\cdot x^2}{|x^1|\cdot|x^2|}$）. 好在$\mathbf{R}^n$中的叉乘运算情形不多，一般在$\mathbf{R}^n$中

用到的是流形上特殊的“外积”形式.

(3) 这里特指的“外积”系指流形中对张量定义的一种向量积运算，记为“∧”(见第一节、五). 它是上述“叉乘”运算思想在特殊条件下的应用和推广，其目的是为着简化微分流形上的微分形式——“外微分”形式——一种多重线性微分式. 为了引入微分流形的外微分形式和外微分，需要借助张量代数等系列的准备知识，续见第十二章第一节、四.

三、∪、∩运算

已经知道，在集合论中，集合被视为几何对象，这时集合的交、并运算分别记为∩、∪，因此当一个代数系统（集合）的对象为集合时，这个代数系统中的运算加或乘即可取作并∪或交∩. 同时关于∪和∩满足的运算定律也是集合论中已有的.

例 10 给定一集合 X, 由于其幂集 2^X 含空集 $\varnothing$ 和单位元 X, 这时容易定义 2^X 上的运算∪、\、∩，因而 2^X 能构成群和环.

四、∧、∨运算

并不奇怪的是，相应于加、乘运算实质在客观事物中的广泛存在性，它们在逻辑学中也自然地存在着，特别在具有量特征的符号逻辑学中表现尤为突出，这里举出几个常见的情形.

1. Bool（布尔）代数中的∨、∧

布尔代数是其∨、∧运算满足如下公理的集合 $(X,\vee,\wedge)$: $\forall x$, $y\in X$, 有:

(1) ∨、∧皆有交换律: $x\vee y=y\vee x$;

$$x\wedge y=y\wedge x .$$

(2) ∨、∧皆有结合律: $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$;

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z) .$$

(3) ∨、∧皆有幺元，即有 $\theta,\ e\in X,\ \ni x\vee\theta=x;\ \ x\wedge e=x$.

(4) 任一元素对∨、∧分别存在补元: 即 $\forall x\in X$,

对∨有 $x'\in X\ \ni x\vee x'=1$;

对∧有 $\tilde{x}\in X\ni x\wedge\tilde{x}=0$.

布尔代数是1847年布尔和D·摩根提出的一个代数系统，又叫布尔逻辑. 上

述公理化形式由 E.Huntington 于 1904 年给出．

例 11 原布尔代数中 $X=\{0,1\}$，分别代表电路的关、开，运算 $\vee$、$\wedge$ 分别叫做“或”、“与”．容易检验（$\{0,1\},\vee、\wedge$）是满足布尔代数定义的所谓“最粗”集合，它在电气类科学（包括计算机科学）上十分有用，布尔代数是计算机科学的基础．

2．数理逻辑中的 $\vee$、$\wedge$

从广义上讲，数理逻辑范畴也包括格值逻辑、多值逻辑、模糊逻辑等，它们的一个公共特征是都有运算关系 $\vee$、$\wedge$．一般称 $\vee$ 为**析取**，称 $\wedge$ 为**合取**，这是加、乘运算在逻辑学中的推广形式．

不管在哪个符号逻辑学的分支中，加、乘运算总是少不了的，且起着关键作用．这就是加、乘运算的普遍存在性在逻辑学中的表现．

为什么加、乘关系如此普遍存在？就因为逻辑关系的本质就是加、乘（包括其逆），而逻辑是物质宇宙的基本属性．

例 12 计算机科学在描述客观世界（具体说是物质宇宙）上为什么如此管用？原来也因为它能实现逻辑的基本运算“+、·”．但超过这一逻辑范畴比如（需要灵感的）创造，它就无能为力了．

3．格中的 $\vee$、$\wedge$ 概念

若在 X 上 $\vee$、$\wedge$ 满足交换律、结合律、幂等律（$a\vee a=a\wedge a=a$）以及吸收律（$a\wedge(b\vee a)=a,\ a,b\in X$），则称 $(X,\vee,\wedge)$ 为一个**格**（lattice）．或等价地定义为，对于 X，若 $\forall a,b\in X$，有

$$a\vee b=\sup\{a,b\}\in X\ ,\quad a\wedge b=\inf\{a,b\}\in X$$

则称 $(X,\vee,\wedge)$ 为**格**．由此可见在这里加乘概念被引申成了取上、下确界的“运算”．

格论作为一门独立学科不仅在代数学、逻辑学中发展很快，而且在诸如泛函、拓扑、集合论等越来越多的领域得到发展．

五、⊕、⊗运算

$\oplus$ 叫做**直和**，也叫 Whitney 和，这是 Whitney 于 20 世纪 30 年代提出的．其基本思想是：在向量丛

$$E=(X,\xi,\pi)=\text{（底空间，丛，投影映射）}$$

中 $x \in X$，$\pi^{-1}(x) = \xi_x \in \xi$，如图 7.4 所示．若 X 上同时有两个丛 ξ_1 和 ξ_2，维数分别为 n_1 和 n_2，则用直和 $\oplus$ 表出 X 上的一个 $n_1 + n_2$ 维的丛 ξ 为

$$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$$

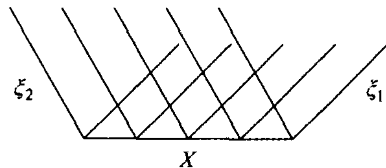


图 7.4

$\otimes$ 叫做**张量积**（本章第一节），它表示张量空间或张量之间的“乘”运算关系．

例如，若有张量空间 $\Gamma_r(V)$（建立在线性空间 V 上的 r 阶逆变张量空间）与 $\Gamma_s(V)$（含义同 $\Gamma_r(V)$），则有

$$\Gamma_r(V) \otimes \Gamma_s(V) = \Gamma_{r+s}(V) \text{（建立在 } V \text{ 上的 } r+s \text{ 阶逆变张量空间）}$$

设张量 $T_1 \in \Gamma_r(V)$，$T_2 \in \Gamma_s(V)$，则有

$$T_1 \otimes T_2 \in \Gamma_{r+s}(V)$$

实际上这是关于比笛卡儿乘积“×”弱的一种空间的乘积运算．

此外，诸如代数拓扑中的上积、下积及其笛卡儿积“×”等也都是一些“乘”运算的推广形式．可以想见尚未流行起来的关于加、乘的推广形式可能还多．由此可见我们只要领悟到加、乘关系在客观世界的广泛存在性，一旦看出了某事物对象（集合）中的加、乘实质，当找不到已知的或流行的加、乘符号与之对应时，完全可以自己定义（赋予）加、乘概念．自然这时还得进一步找出相应的代数结构或说相应的运算规律才有意义．

第五节　广义代数学

一、数学的代数结构

这已属公认实事了，在第三章第三节也已述及，这里再简略强调几点．

（1）代数结构是数学中的三种基本结构之一，也是其中最为广泛和重要的一种．这正是代数结构与加乘运算在客观世界存在着广泛对应关系的反映．或者说是因为逻辑学的基本特征就是代数学的原因．

（2）既然代数结构是数学的基本结构之一，作为数学基本运算的加、乘自然也是其基本运算关系了．其实可说“没有加乘就没有代数，因而没有代数就没有数学”．

的确，即使微积分运算中也少不了＋，·（包括其逆运算），比如请欣赏下例：

例 13

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\Delta x_i)$$

满足 $\max \Delta x_i \to 0$， $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] = \Delta x_i$， 注意到这里少不了和（加）运算$\sum$. 又

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

这里少不了减法和除法—— 加、乘的逆运算.

（3）虽然代数结构在数学中普遍存在，但对于一门数学分支，若要在其理论中“嵌入”代数结构，还必须事先将数学的有关结构与相应的代数结构结合起来，形成一种所谓“复合结构”才行. 只有这样，得出的成果才能真正体现原有的代数结构特征. 比如：

例 14 拓扑线性空间是拓扑空间与（代数的）线性空间“复合”而成的复合空间. 即对于拓扑空间(X,τ)与线性空间$L(X,k,+,\circ)$，若 L 中的$+,\circ$运算相应于拓扑（基） τ 的连续性，即$\forall x_1,x_2 \in X$，有

① $(x_1,x_2)\to x_1+x_2$ 对应于$T: X\times X\to X$，拓扑映射T连续；

② $(\lambda,x_1)\to \lambda\circ x_1$ 对应于$T: K\times X\to X, T$ 连续，

则称 X 为拓扑线性空间.

同理，诸如距离空间、赋范空间、内积空间等都是代数与拓扑的复合型空间，具体说是线性空间与相应的拓扑空间的复合型，它们的（公理化）定义中同时包含了两个空间的特征.

特别地，复合空间往往表现为比原有（至少两个）空间的“数学性”都强，这也是数学上致力于复合空间理论的主要动因.

借此思想，我们完全可以随时根据需要去构建新的复合空间、复合模型，再进一步考察它是否更有利于问题的解决.

二、大自然的代数结构

关于这点，简述几条理由：

（1）数学反映的规律从根本上说是自然规律，甚至大自然（包括自然、社会、人与精神）规律. 既然代数结构是数学的基本结构，那么说它也是自然甚至大自

然（广义）的基本结构并不矛盾．

这是因为，代数结构也在符号逻辑中普遍存在．虽然在经典的形式逻辑学中还没有这一结论，那只是因为经典形式逻辑学没有定量表述的缘故．作为其定量表述的符号逻辑，虽然在范畴上较之经典逻辑有所“萎缩”，但毕竟只是因为定量概念的分明性需要，而不是本质的，所以由此不难承认代数结构也是大自然的基本结构．

（2）自然科学是自然规律、自然本质特征的反映，而代数结构在自然科学中则已越来越多地体现为其基本结构．这一说法从一些现象可以得到支持，比如线性代数在科技中能广泛应用；群概念、代数概念能在自然科学中得到越来越广泛的应用等，都能说明问题．

（3）似嫌遗憾的是，在社会科学中那种已建立起来的、典型的、有名的代数系统除“线性代数”模型外还不多，但这并不能说明社会科学或社会的基本结构中缺乏代数结构，只是因为过去的数学对社会科学关心不够或说社会科学的发展还没有形成对数学的深刻需求，以致探索更深刻代数结构的时代还没有到来．

事实上，如果说凭直觉尚看不出代数结构在社会中更为深刻的存在性，那么凭经验已能感知作为代数胚芽和生长点的加、乘关系在社会事物中是具有普遍存在性的．

因此，我们应该呼吁人们注意社会及社会科学中的代数认识和代数研究．总之，自然中特别是大自然中也存在着深刻的代数结构，有待进一步探索．

三、广义代数学

至此已经看到，加、乘是代数学的基本特征，而且作为数学中的代数结构，其基本特征仍然是加、乘，再据加、乘推广概念的广泛性我们完全可以这样来定义：

（广义）代数学：研究客观世界中一切具有或本质上具有加、乘意义下的运算关系的对象空间中结构特征的科学，都叫做代数学．

代数结构：客观世界中一切具有加或乘关系实质的对象空间（或叫对象集）都叫做具有代数结构．

由此推广性定义，既能突出代数学对象的加、乘特征，又能突出代数学在客观世界中的普遍性和基础性．原来代数结构正是客观世界的基本结构，因此代数学大有发展的余地．（附：莱布尼茨说《易经》是大自然的代数学，请有条件的读者咀嚼之．）

第六节　小结图

如图 7.5 所示，我们用下列“流水线图”简略勾画一下代数学的历史发展概况，希望它将有助于读者对代数学体系作鸟瞰性欣赏.

10则→(函数论体系)　　数论

古代→算术“+”→文字算术(古典代数,如不定方程)→□

□→(符号代数)代数方程→Δ_1, Δ_2, Δ_3

其中: Δ_1:高次代数方程组→代数几何(几何数论,代数数论)---→

Δ_2:高次代数方程→数系发展→复数系(代数完备数系)→超复数系——→*1

→求根公式(1~4次)→群→(一般集合中“+,·”结构研究)　*2

→因式分解理论(密码学)

Δ_3 :线性代数方程组 →线性空间(模).代数 ---→

其中: *1→广义超复数系(基于一般对象的代数系统)→代数学 I

*2→群论→表示论 ---→

→群的分类

→伽罗瓦理论 ---→　　II

*2→环→“+, ·”概念的推广

→域(体)

→线性空间(模).代数

其中: I ——————————---→

II→符号逻辑中→Bool代数:∨,∧

→数理逻辑:∨,∧. ---→

II→集合间运算:∪,∩

II→向量间“乘”运算推广→内积 “·” (R^2→R^n空间中)

→外积 “×” (仅在R^2,R^3中)

II→张量空间中外积 “∧”---→

（以上 I、II 合称）广义代数学

注.“⟹”表代数系统外的发展.

“--→”表继续发展.

图 7.5

第八章　周期数学及其认识

第一节　周期原理

一、大自然的周期结构

让我们见惯不惊的周期世界也真能使人惊异. 年月的周期、昼夜的轮回、月亮的圆缺、太阳的起落，乃至生命的“迭”代、事物的兴衰、物价的消长、朝代的更迭，真是花开花又落，雁去雁又来. 即使江水流入大海也将从天上回来而形成周期运转，似乎一切的一切都是周期的，甚至经济萧条、地震、天旱都有周期. 据此观察，我们至少可以猜测:“周期”是整个自然甚至大自然的基本结构特征.

之所以叫“猜测”是因为我们的结论仅来自现象观察和直观理解，还需要从大自然的本质上或从逻辑上去认识，才能作出最后结论. 好在大自然中的事物普遍存在周期性，否则将更难认识它. 比如看起来简单的素数分布（数论）问题，就因为它没有周期，所以至今在素数集中还有甚至越来越多问题未弄清楚，也就是说，因此人类至今未能认清素数的分布规律.

《道德经》说“道动而生逆”，此即周期、循环的含义，而道就是客观规律，可见老子已看出客观世界的周期特征和规律. 不妨说规律就是周期.

二、周期：用有限表现无穷的基本方式

我们知道，无穷是无法达到和实现的，即使从现实意义讲，“任意大”也是不能实现的. 然而我们无不感觉到，我们的生活空间以及生活本身都是“无穷”的，那么“上帝”是怎样引导我们去步履、度量这无穷道路的呢? 我们说，还是用的“周期”这把简单的尺子. 不是吗? 车子可凭借其圆轮周期地无限行驶下去，日月可凭借其轮回周期地无限运转下去，尺子可凭借其重复周期地无限度量下去.

更重要的还在于，不仅周期运行可以无穷进行，而且只要认识了“周期”即可认识无穷. 这是十分便利的事. 比如凭借周期，哈雷认识到哈雷彗星约 75 年回来一次，人们知道太阳黑子每 11 年出现一个高潮等.

当然，我们只能说周期是表现无穷、认识无穷的一种“基本形式”，并非唯一形式．比如极限方法也是数学用以认识无穷的一种重要手段，而且也是通过对其有限部分的认识来认识无穷的．比如对一个数列 $\{a_n\}$ 求极限，并非任何时候都能成，其条件是“必须给出通项 a_n 的表达式”，自然这个 a_n 必是其序号（也说是时间变量）n 的函数．事实上，给出 a_n 的函数表达式就给出了整个 $\{a_n\}$ 的变化规律．这个“规律”就是 $\{a_n\}$ 的变化“趋势”，一般表现为单调性、有界性和收敛性、发散性，其中也包括周期性和振荡性．

推广之，生活中人们认识一切陌生或隐秘事物的“规律”时，往往归结于找它的“周期”表现．比如已观察到彗星出现的周期，就算认识到它的规律了．又如对天灾和股市变化规律的了解，尽管看不出它的周期，但人们总是力求找出它的周期，哪怕是广义的周期也行，否则就不算认识了它，就永远不罢休．

三、周期：运动的基本形式

已知，运动是宇宙的存在形式，而运动总可以而且仅可以分解为**平移**和**旋转**两部分，或说归为**线量**和**角量**两种量来表示．所以至少可以说旋转性是一切运动中的“半边天”，那么进一步根据运动范围的有限性，诸如微观世界的粒子振动、地球在太阳引力范围内的“无限”运动等，更能看到，运动中旋转（角量）成分是重要的、宏观的，平移（线量）运动是短暂的、局部的．严格说来它只在运动轨迹的“切向”上存在，所以不能不说周期运动正是旋转加切向平移的运动，因而是一切运动（包括自然的、大自然的和人为）的基本形式．

当然出于客观世界具体运动的复杂性，在对实践中各种运动作具体分析时，也产生了循环、振动、波动、起伏、旋转、螺旋、轮回、周转等概念．显然，这些都是周期概念在实际生活中的推广概念，由此也说明周期概念从而周期运动在客观世界包括人们生活领域中的广泛存在性和深刻存在性．

四、周期与循环辨

即使生活中所说“周期”和“循环”，在概念上也是有区别的，尽管两者皆表示一种周而复始的运动，描述了运动对象的一种轨迹状态，但各概念的空间意义并不相同．比如循环中可有周期，但周期运动的轨迹不一定产生循环．因为说**周期**一般是指“时空空间”里的运动状态；**循环**系指不含时间维的所谓“相空间”（或说沿时间轴产生正投影后）的轨迹状态．若这样，显然两者即有差异了．

的确，比如如今已能判定，宇宙中一般天体的运动轨迹从时空空间来说并不

循环，而是存在着所谓“进动”. 我们说它循环（实质上）是对于相空间来说的. 即使我们说“循环小数”，这里的“循环”概念也是排除了时间意义的，因而本质上也是在“相空间”来说的.

又，形式逻辑是推理，因而是运动，然而在逻辑推理中不希望循环，否则将产生错误、悖论或怪圈. 所以说原则上在逻辑学中是不存在循环的，但它有周期，即逻辑推理的周期递代和螺旋式推进. 正如已知（第五章），逻辑推理（形式逻辑）的本质是时序的因果，少不了在时空空间分析问题，所以它没有循环，然而却可有周期.

五、周期原理

根据以上观察，我们认为完全可以得出一个结论：

周期原理：对于永远处于运动状态的自然和大自然来说，一切事物中都可能存在周期或周期性，值得我们以周期的观点去认识它或致力于去寻找它的周期或周期性，叫做**周期原理**.

的确，即使在严格的数学理论和成果中也已表明，上述周期原理是正确的，甚至在无穷意义下（通过无穷级数），周期旋转与平直运动之间（即角量与线量间）也是存在转换关系的. 可以说周期研究的内容也是数学中的“半边天”，叫它做“周期数学”，这就是以下将要继续讨论的内容.

第二节　周期函数及有关概念讨论

一、周期函数定义及其讨论

1. 定　义

定义 8.1　设有函数 $f(x)$, $x\in D(f)$（定义域）$=G\subset \mathbf{R}$，若 $\exists T\in\mathbf{R}\ni\forall x\in G$，

$$f(x+T)=f(x)\text{ 且 } x-T\in G$$

则称 $f(x)$ 是 G 上以 T 为周期的**周期函数**.

定义 8.2　设有集合 X，若 $\exists T\in\mathbf{R}\ni\forall x\in X$ 有

$$x+nT\in X$$

n 为自然数，则称 X 为**周期点集**或叫**周期集**.

注：（1）显然这里“周期”一词是一种转义，原义系指转动物体时旋转一周

所花时间．不过这种用法已成习惯了．

（2）可以看出，原则上周期T可为任意实数，但实践中的周期T和频率$\omega=\dfrac{1}{T}$往往只是有理数．这是因为度量实践的原因，据“实数再认识”，这是可理解的．

2．周期函数的定义域$D(f)\triangleq G$总是（正负）无穷的

这是因为据定义设有周期T，则$x+T\in G$，令$x'=x+T$，则

$$x'+T=x+2T\in G$$

设$x''=x+nT\in G,\ n\in\mathbf{N}$，必

$$x''+T=x+(n+1)T\in G$$

又，取$x'=x-T$，因为已有$x'\in G$，则有

$$f(x'+T)=f(x')=f(x-T)=f(x+T-T)=f(x)$$

取$x''=x'-T=x-2T$，又因为$x'\in G$，则$x'-T\in G$，所以有

$$f(x''+2T)=f(x'')=f(x+2T-2T)=f(x)$$

如此下去不难得

$$f(x-nT)=f(x),\ n\in\mathbf{N}.$$

所以$D(f)=G\subset\mathbf{R}$是（正负）无穷集．

从认识论来说，一个系统只要有周期就意味着会无穷“生存”下去（反之不一定），除非在中途系统f被改变了．比如一个经典的市场经济系统有周期萧条现象，为此需要施以适度的政府干预（改变原有f）去消除它，就是这个原理．

3．定义域G的类型

（1）$G=\mathbf{R}$情形，比如经典的周期函数，如$\sin x,\cos x$等即如此．

（2）$G=\mathbf{R}\setminus\{h\}$，其中$\{h\}$表示离散（无穷）子集，它是$f$的间断点集．比如$\tan x,\cot x$分别以$\left\{\dfrac{h}{2}\pi\right\}$和$\{n\pi\}$作为其$\{h\}$集．特别地，$\{h\}$也是相应于$f$的周期$T$的周期点集或周期点集的并集，其周期与相应$G$上$f$的周期$T$相同．

（3）G为离散点集，比如下段“二”将谈到的“点周期”函数即如此．

4．定义域G的代数结构

（1）G是加群的情形．此属上述“3、(1)”情形，这时$G=\mathbf{R}$，它不依赖于f而独立地成为加群．

（2） G相对于f是加群的情形．此即上述“3、（2）”情形，这时的G对于f的周期T满足同余式：

$$x \equiv \xi \ (\bmod T)$$

即对$\forall x \in G$，$\exists n \in \mathbf{N} \ni x - nT = \xi \in (0,T)$——开集，端点属于$\{h\}$．

（3） G可以变成加群的情形．此即“3、（3）”情形，这时G虽然不成群，但若将G中元素按时间（自$t=0$开始向正负方向）编号，则此序号集是个整数集$\mathbf{Z}$，从而是个加群．

（4） 设$D(f)=G$，$\forall x \in G$有$y=f(x)$，则集合$x=f^{-1}(y)$是无穷集，且是以T为周期的“周期点集”．例如一般周期函数即如此．

5．周期的认识

根据周期定义1知，对于一个函数，只要周期存在必有无穷多个周期，因此自然考虑到这时所有周期的集合有何特征．为方便计仅就正周期集考虑，并记之为P．现来考察P具有的特征．

（1）具有最小正周期的情形．此即存在$T=\min P$，比如三角函数皆具有最小正周期，一般所说周期函数，皆有最小正周期．

（2）有无穷小正周期的情形．这是特殊情形，例如狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \in \mathbf{R}_r(\text{有理数集}) \\ 0, & x \in \mathbf{R}_I(\text{无理数集})\end{cases}$$

这时它的周期为无穷小，注意是无穷小而不是0．

（3）有0周期情形．这也是特殊情形，系指（特殊的）常数函数．

（4）有∞周期情形．系指一般的无周期性的函数，比如e^x，多项式函数等即是．

（5）变周期情形．比如$\sin\frac{1}{x}$，$x \in \mathbf{R}$即如此，它仅有周期“值”，严格说是“循环”值，即在值域上循环，而在定义域上却没有周期，或说成周期在变．

总之，严格说来，(2)～(5)皆属非周期函数情形，但相对于周期概念来，它也有规律，所以可用周期概念去认识它．

6．周期函数的值域特征

记周期函数的值域为$u(f)$，则$u(f)$总是个对称区间，具体说它有几种情形．

（1） $u(f)=[-b,+b]$，$b \in \mathbf{R}$．这是一般情形，这时的对称中心为0．

（2） $u(f)=[a-b,a+b]$，$a,b \in \mathbf{R}$，这里a为$u(f)$区间的对称中心．例如，$f(x)=a+\sin x$就是这样的周期函数．

(3) $u(f)=a$（常量），即值域变成一点的情形. 此属定义 2 中的一种周期情形，亦即“4、(4)”的一种情形.

(4) $u(f)=\mathbf{R}$. 这种情形下，必有点集 $\{h\}$ 作为 f 的第二类间断点集，例如 $\tan x,\cot x$ 等即如此.

问：(1) 周期函数经运算（比如四则运算）后，其周期性的改变规律如何？有兴趣的读者请自己去考察一下.

(2) 有多元周期函数吗？关于实的多元周期函数理论尚未建立，至于是否具有实践意义，是否有必要建立它，笔者尚未考虑过. 但关于复数的函数，自然含周期性，亦可叫做二元周期函数.

二、复数及复变函数的周期性

1. 复数的周期性

在第七章第三节谈到，复数系是代数完备系统，是具备“二象”结构的完全空间，也可叫做**运动完备系统**. 它除了能表现运动的平移性外，更能表出运动的旋转性. 其数学表达式中，既有非周期成分（线量），又有周期性成分（角量）. 比如，

$$x+\mathrm{i}y=r\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}},\quad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arccos\frac{x}{r}$$

即如此，所以人们一谈到周期理论就必然想到复数、复变函数. 涉及周期函数的理论，如果不用复函数，其困难性是难以想象的. 有了复变函数工具，很多数学问题可以容易地得到解决. 除已举到的情形外，还有诸如罗巴切夫斯基几何的表述和椭圆函数分析等都是这样，一旦纳入复变函数领域，即可得到更为深刻的认识.

正因如此，复变函数论在已有长足发展的解析理论、调和分析或叫傅里叶分析等基础上，20 世纪六七十年代以来又发展起了复动力系统和多复变函数等十分抽象的复分析新分支，其动因即来自复域的上述“二象性”、“完备性”特征.

2. 复数域中的三角函数、双曲函数

我们知道欧拉于 18 世纪中叶通过幂级数建立了复数的欧拉等式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z\ \ (z\ \text{取弧度制})\ [1]$$

---

① 凡是三角函数与非三角函数一起作运算时，共同的自变量只能取共同的坐标系下的量.这是一种抽象的“长度量”，那么对于三角函数中角度量（记为 x°），只须经变换 x° 度$=\frac{\pi}{180^\circ}x^\circ$（弧度），右端的“弧度（单位圆上 x° 对应的弧长度）”即合要求了.

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{8.1}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

同时他还证明了复指数函数 e^z，$z \in \mathbf{C}$ 有周期为 $2\pi i$，且所有三角函数公式在复数域中都成立．此外，由式（8.1）也可知，在复数域中不满足“单位圆不等式”，$|\sin z| \leqslant 1$，$|\cos z| \leqslant 1$ 仅在实数域内才满足．事实上比如由式（8.1）后两式直接可得有 $\sin i = 1.1752$，$\cos i = 1.543\,08$．

再则，根据双曲函数的定义，即级数式

$$\mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}$$

$$\mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} z^{2n} \tag{8.2}$$

还可得到

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz \quad 或 \quad \mathrm{sh}\, iz = i\,\mathrm{sh}\, z$$

$$\mathrm{ch}\, z = \cos iz \quad 或 \quad \mathrm{ch}\, iz = \mathrm{ch}\, z$$

总之，实域上三角函数和双曲函数的关系式中除了“单位圆不等式”外，皆在复数域中成立．

3．复变函数的周期性

在 $f(z)$ 中由于 $z = re^{\varphi i}$，所以 z 具有周期性，从而容易理解，其函数 $f(z)$ 也具有周期性，不过可能来得更为复杂．事实上的确如此，我们说复变函数的分析之所以比实函数的分析来得复杂一些，关键即在于复变函数有复杂的周期性特征．诸如其对数函数、根式函数的多叶性（Riemann 面）问题，线性变换产生保角映射问题，以及在奇点处积分可产生“留数”问题等，都是复变函数自身复杂的周期特征造成的．

此外，不能不提到由傅氏级数引出的一门十分热门的应用基础理论分支——傅里叶变换与傅里叶分析，也叫“调和分析”，它也是研究时-频、相位等复杂周期性的，也是今天十分红火的“小波分析”的直接基础（见第四节、第五节）．

最后，多复变函数理论也是出于它的困难性，迟至 20 世纪六七十年代才兴旺起来．之所以如此，周期性特征在其中的复杂表现也是原因之一．

第三节　作为解的周期函数认识

一、周期解与定性理论

我们知道不管什么“方程”的研究都是围绕着一个“解”进行的，这里谈谈常微分方程. 关于它，在 1841 年以前人们一直致力于用积分方法求出解的解析表达式，因此在常微分方程的求解上创造出很多方法，且有着十分丰富的内容留给了后世. 但当时比如一个简单的 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$$

就一直解不出来. 这在过去总以为是技术性困难，直到 1841 年刘维尔（Liouville）证明了它不可解，这才使人们猛然醒悟到，不是所有微分方程都能用积分方法（微分的逆运算）求出解来的，从此也产生了“解”的理论研究，主要包括解的存在性、唯一性、稳定性理论和解的**几何理论**（又叫**定性理论**）等.

在解的定性理论中主要研究解族（又叫解空间）的整体结构和某些特殊类型的解的特征. 当然对于这些特殊类型的解，自然是简单、容易、规律性强的了.

那么，其中由周期函数或类周期函数所决定的解叫做**周期解**. 于是周期解就成为人们最为关心的事了.

可以说周期解和周期特征研究是整个常微分方程定性理论和整个动力系统理论的重心，周期解概念在这里也发展成了更为丰富的概念，如下所述.

二、H-系统与周期轨类

以一个简单的例子来说明，比如一个振动方程

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=p \tag{8.3}$$

右端表示受迫力或叫控制项，左边第一项是加速度，第二项表示摩擦作用，第三项表示内应力. 一般的可有

$$a=a(\dot{x},x),\quad b=b(x),\quad p=p(t)$$

这里仅设 $a,b,p\in\mathbf{R}$ 且为常数，这时的（参数不随时间改变的）方程叫做**自治系统**.

目前，特别在控制论中，一般是将其化为一阶方程组来讨论，即设 $\dot{x}=y$，那么有

$$\dot{y}=\ddot{x}=p-ay-bx$$

从而化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y\triangleq P\\ \dot{y}=p-bx-ay\triangleq Q\end{cases}\tag{8.4}$$

如此，一般的高阶线性微分方程，皆可化为一阶方程组，无须增加条件（但反之由一阶方程组化为高阶线性方程不总是可以的）．如今统一把这样的系统叫做**哈密尔顿形式**（简称 H-系统，进一步的见式（9.29）），相应地把式（8.3）的一般形式叫做**牛顿系统**．

常微分方程中自变量只有一个，即时间 t，其他的变量皆是因变量．自治系统（8.4）中，因变量为 x,y，把它叫做**二维自治系统**（也可叫二阶系统，因其对应到式（8.3）中为二阶）．显然式（8.4）的解曲线必充满（时空空间）$x\times y\times t$（见图 8.1），尤其对于自治系统，它有个优越的特性，即不仅在时空空间上，其解满足存在唯一性（过空间内任一点的解有且只有一条），当沿 t 轴正投影到相空间（即因变量空间）后，轨线（相空间里的解叫做轨线）也满足存在唯一性，除奇点外彼此无交叉．因此对于自治系统只须在相空间来讨论解即可，这时分几种情形来讨论．

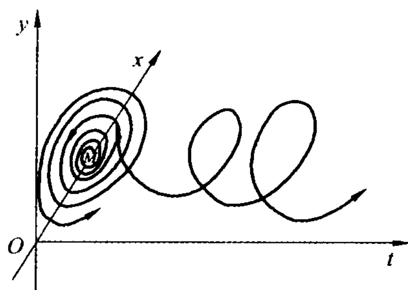


图 8.1

（1）振动轨．

据常微分方程定性理论（一般的专业性课本上都有），可算出式（8.4）的奇点（$\dot{x}=\dot{y}=0$的点）为

$$M(x_0,y_0)=M\left(\frac{p}{b},0\right)$$

再算出式（8.4）在点 M 处的特征多项式

$$\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y}\end{matrix}\right|_M-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -b & -a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+b\tag{8.5}$$

这时若判别式$\Delta = a^2 - 4b < 0,\ a < 0,\ b > 0$，则有如图 8.1 所示的情形，$M$ 点为不稳定焦点，这时出自 M 的轨线绕 M 盘旋，并自内向外扩展，这时的解轨叫做（**不稳定）振动轨**. 显然相应解具有一定的周期性，却不是严格的周期函数解.

（2）周期轨.

比如在式（8.3）中，若令$a = -\mu(1-x^2),\ \mu \in \mathbf{R}$为参变量，$p = 0,\ b = 1$，则化为一阶方程组，有

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu(1-x^2)y \end{cases} \tag{8.6}$$

这是电气工程师 van der pol 于 20 世纪初提出，并因此开创了数学中极限环理论学科分支的 van der pol 方程.

对其作定性分析容易证明，当$\mu > 0$时，有如图 8.2 所示的极限环Γ（其内外都有振动轨无限趋近于它）. 极限环正是一种周期解，具体说是一种周期轨（因在相平面上）.

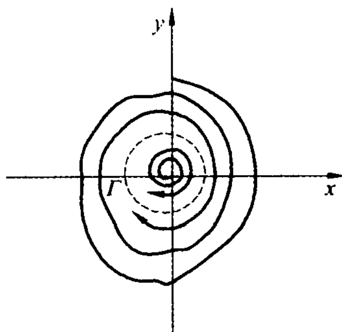


图 8.2

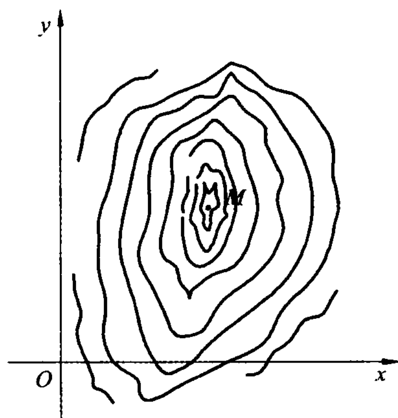


图 8.3

（3）周期轨族.

为简便计，仍回到式（8.4），若这时$a = 0$，则按式（8.5）的判定，其奇点 M 为"中心型"，如图 8.3 所示，其轨线是一族围绕着中心 M 点的闭轨，叫做**周期轨族**. 显然它们中每一条轨线都是周期函数.

特别地，在式（8.4）中$a = 0$时容易直接积分而勿须作定性分析，即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{p - bx}{y} \to y\mathrm{d}y = (p - bx)\mathrm{d}x$$

从而作积分，并化简得

$$y^2+\left(\sqrt{b}x-p\right)^2=C\text{（}C\text{ 由积分常数经演算而成，表任意正实数）}\tag{8.7}$$

式（8.7）即为实际得到的周期轨族.

有一个现象（叶彦谦问题）：一般说如果一个二阶（或以上）常微分方程能通过积分求出通解，则其奇点（若有）常常是“中心型”奇点. 否则，当奇点为焦点、结点、鞍点或更高次情形则难以积分求解，而不得不采用“定性分析”理论. 为什么？事实上“中心型”问题即所谓“保守系统”或叫“哈密顿系统”、“非耗散系统”，又叫“可积系统”. 看来，属非“中心型”的所谓“耗散系统”（亦即能量非常定的系统）是难积的或说是“不可积”的，但为什么呢？（1992 年叶老在通信中顺便要笔者作的这一问题，至今没有交卷.）

三、调和解类

对于一般的受迫动力系统

$$\ddot{x}+f(\dot{x},x)\dot{x}+g(x)=p(t)\tag{8.8}$$

设强迫力 $p(t)$ 是以 T 为周期的周期函数，则当式（8.8）有周期解 $x(t)$，且周期等于 T（与 $p(t)$ 的周期相同）时，此解 $x(t)$ 叫做式（8.8）的**调和解**；若 $x(t)$ 以 nT 为周期（n 为非 0,1 的整数值），则 $x(t)$ 叫做式（8.8）的**次调和解**；若 $x(t)$ 以 $\frac{1}{n}T$ 为周期（n 为非 0,1 整数），则 $x(t)$ 叫做式（8.8）的**超次调和解**.

显然根据一个周期的任一整数倍也是周期的性质，调和解也含次调和解；超次调和解也含次调和解与调和解.

对于（8.8）型非自治的常微分方程，其解的定性分析不宜在相空间进行，必须在时空空间内讨论，因这时在时空空间内无交的积分曲线投影到相空间后不一定无交了. 所以这时的定性分析方法没有像（8.3）型（自治）系统那样在相空间里的定性分析方法来得规范、有效，而是显得更繁杂了.

这时，一般是在时空空间用微积分学分析方法或泛函分析方法，归结起来常常是用建立在解的几何直观概念上的一些方法，比如不等式、不动点理论、渐近线分析、与 t 轴的交点集分析等都是其常用的概念和手段.

例 1 对经典的 Duffin 方程

$$\ddot{x}+c\dot{x}+b(\mathrm{e}^{|x|}-1)\operatorname{sgn}x=p(t)$$

用 Brower 不动点定理（闭域上连续自映射必有不动点）即能证明，即只要 $x = x(t)$ 一致有界（即 $\forall x \in \mathbf{R}^n$，皆有模 $|x| \leqslant A$, $|\dot{x}| \leqslant B$, A, B 为确定常数），则该方程有周期解（证明参见桑森 · 康蒂著《非线性微分方程》，科学出版社，1983 年）

第四节　周期概念的推广、周期函数论的发展

一、周期概念的推广

周期作为一个人为定义的概念，也是个被提升成的数学模型，因而它只在数学中、理论上是严格的、典型的、精确的，而在实践中的存在，往往并不如此精确．这时将产生两种情形：一种是作为定性认识，需要将周期稍作广义地来看待客观事物中的周期实质，称作周期“性”，这是第一节谈到的思想；另一种是在对客观事物作定量探讨时，为了对具有周期性的事物做更准确的描述，有必要对周期概念作一定的推广，定义出相应的有效概念，这就是本段所要说的．

1．拟周期

两个周期函数叠加后不产生新的周期函数，这样的函数叫做**拟周期函数**．

例 2　$x = \cos\omega t + \cos\sqrt{2}t$，当 $\omega \neq \sqrt{2}$ 时，两者无公共周期，所以不产生新的周期函数．因此按周期函数定义，x 已不是周期函数．但这时 x 也表现出一些明显的周期性特征，比如 x 与 t 轴的交点集为可数无穷集、x 具有有界性等，所以赋予它一个“拟周期”名称．

“拟周期”概念的提出来自应用科学，比如在晶体理论和力学乃至混沌研究中都有应用．但在数学中没有必要建立相应理论，因为只要分别对各周期函数项研究清楚就行了．

例 3（应用）　设计铁轨时，原则上不应让轨长（L）与轮周长（l）之比 $L:l$ 成为有理数（实践意义上则应使其比值的小数位越多越好），这样才能保证轮沿在轨道接缝处的受碰点不致重复或很少重复，以延长轮子寿命（见拙文“关于钢轨接头形式的讨论”，载《应用数学文集》，1989 年）．

2．概周期

概周期，又叫准周期、殆周期，提出于 1924 年，其定义为：

对于函数 $f(x)$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$f(x)$ 的 ε-移位数集

$$T(f,\varepsilon) = \left\{\tau \middle| \left|f(x+\tau) - f(x)\right| < \varepsilon, x \in \mathbf{R}\right\}$$

是相对稠密的(即考察的点数一定时，ε愈小，ε-移位数集的密度愈大)，则叫$f(x)$做**概周期函数**.

概周期函数的研究是非自治常微分方程解理论的一个分支方向，它在力学中的应用很多，比如天体的运动就是概周期的．对于三体问题，在适当意义下即有概周期解.

3．点周期

这是建立在离散点集上的周期函数，只知道函数在所考察的点集上是周期的，但在这种已知点以外，函数的情况不知道，叫这样的周期为**点周期**．比如离散动力系统中，若$x_n = f(x_{n+i})$，则x_n叫做i-周期点．这里i是产生循环的最小正整数，当$i = 0$时，x_n即成为不动点（0周期）．又如混沌可被定义为“相空间中具有稠密周期点的运动状态”，这里也是从“点周期”角度来考察的.

在讨论非自治微分方程解时，若获得某解在任意远处都能与t轴或t轴的某平行线有交点，则可判定它为周期性解，这也是一种点周期概念.

特别地，比如一个人每天准时早出晚归，尽管他每天出去的行程和生活内容完全不同，但从早晚确定时刻，在他家门口来考察，一般总说他的生活是周期的、有规律的．又，人们若能通过天文观测得知某星星多少年能出现一次便说它有周期、有规律等，这些都是点周期概念的表现．总之，生活和科研中运用点周期概念的事例也很普遍，已成习惯．这是因为点周期概念更为广义，因而更贴近现实生活.

4．动力系统中的**类周期点集**

动力系统（概念见第九章式（9.9））是常微分方程论与拓扑学结合下产生的抽象与推广（常微分方程属于经典动力系统或说连续动力系统），因此容易理解，动力系统所关心的仍然是“解”．不过在动力系统中叫做**轨道**，轨道的集合或说轨道族叫做**流**．同时也与经典动力系统中“解”的研究一样，它首先关心的是其周期解．不过在一般动力系统中，亦即离散动力系统中，出于它的离散性，所关心的只是其**周期点**的研究，并且这里的周期点集比一般具有点周期的周期函数的周期点集，来得复杂且更为宽广.

记一般动力系统为(X, f)，f表示相空间X上的同胚（连续一一的）映射，并记该系统的**周期点集**为$P(f)$；由于一般在(X, f)中有不动点（满足$x_n = f(x_n)$的点），这也是一种周期为0的周期点，记**不动点集**为$F(f)$.

又，在(X, f)中还有所谓**回复点**：设有$x \in X$，其任意邻域为$N(x)$，若$\exists m \in N \ni$（m步映射）$f^m(x) \in N(x)$，则x叫做回复点．显然回复点也是一种类周期点，具体说是类似于概周期点，记(X, f)的回复点集为$R(f)$.

再则，(X,f) 中还有一种**非游荡点集**：设 $x\in X$ 及其 $\forall N(x)$，如果 $\exists m\in N\ni f^m(N(x))\cap N(x)\neq\varnothing$，则 x 叫做 f 的非游荡点．实际上这是一种对 x 的邻域集来说的概周期概念，记非游荡点集为 $\Omega(f)$．

最后把以上各种点集统一叫做**类周期点集**（一般叫不变集），则据动力系统理论，它们有关系

$$F(f)\subset P(f)\subset R(f)\subset \Omega(f) \tag{8.9}$$

进一步的可参见第九章第二节．

二、统计周期与复合周期性

以上各种周期概念只是基于（微分方程决定的系统空间内）质点运动轨迹来说的，或说是为着数学讨论的完美性来说的．那么，本段则侧重于实际，以从实际出发来讨论一般复杂系统整体运动规律．

显然，这时仍然以探索其周期特征为最优手段．同时，仍然没有典型的周期可寻，也不只是上述推广意义下的周期，而是来得更为宽广．亦即对于复杂系统将有更多的周期类型可探讨．然而恰恰是这些新的周期类型使我们能够更好地运用“周期原理”去探讨复杂系统．比如这里将着重提出的统计周期和复合周期即是如此．

1．统计周期

比如以一个社会为例，经验亦知构成一个社会的周期性何其多．宏观地讲也有农业的周期性、金融的周期性、企业的周期性、市场的周期性等，每一个的周期性都是复杂的，何况还要附加上诸如政策的周期性、通胀与失业的周期性等．尽管可说这些周期都是有理数的，但也不可能找出它们共同的周期（最小公倍数）来，因为这些“周期”值本身难以厘定（只是周期性），同时有多少个周期也难以厘定．

那么，社会是怎么运用“周期原理”来做管理的呢？其实，“复杂过分就是简单”，人们只需新引入个“统计周期”问题就解决了．

通常，社会管理者是以一年作为“统计周期”的周期长，并作周期统计，持续下去即成为（一年为周期的）周期序列了．比如，以每一年的某一天为准，法定一套计量规则，对社会中所有周期的周期过程都在该天作出计量（按周期理论，这也是合理的），继续下去，这一统计量序列就是周期的了．

因此说，用“周期原理”去观察社会管理中十分平常的“定期统计”法，发现它也有更深的科学内涵．

2．复合周期性

从简例谈起，设某企业有投资 Y，首先转换为生产条件 X（包括人力、原料、设备等完全成本），记为

$$Y \to X$$

然后进行生产，记为

$$f(X) = \tilde{X} + \sigma_1$$

其中 $\tilde{X}$ 表示产品，σ_1 表示产后品（如垃圾等）；最后将产品销售出去，记为

$$g(\tilde{X}) = Y + \Delta_1$$

其中 Δ_1 表示盈余（可正、负）.

这时看到，若 $\sigma_1 = \Delta_1 = 0$，则该企业可以继续下去．如若保持之，则说这一过程是“典型周期”的．当然，这只是一种特殊情形．一般是 $\sigma_1\Delta_1 \neq 0$，且设 $\Delta_1 > 0$，若这样继续下去，由于 $\sigma_i, \Delta_i (i = 1,2,\cdots)$ 是非周期的，其累积性必然产生社会效应，甚至如 $\sum_i \sigma_i$ 将产生社会问题．因此必须从 Δ_i 中拨款去消除 σ_i，显然这是又一个周期过程（$0 \to \sigma_i \to 0$）．于是说这时企业是在增加了又一个周期运作之后，才回到了周期状态，也才回到可持续性状态．把这样的周期状态叫做“复合周期性”.

一般地，如果一个系统的周期状态是由多个相关周期共同完成的，则说这种周期状态是**复合周期**，或更一般的**复合周期性**（后者自明）.

推广这一思想可见，任一社会系统都广泛存在着这一“复合周期性”问题，只是那时的 σ_i 和 Δ_i 都是很复杂的向量罢了（甚至这些量还需要用上“统计周期”法去作计量呢）.

特别地，今天全球强调的“绿色环境”问题，正是为着实现人类社会的“复合周期”或“复合周期性”问题，也皆因“周期”是系统可持续的必要而基本的条件.

事实上，借此“复合周期性”概念还可以继续对社会系统作出更为深刻的分析．比如，可把社会发展分为（典型周期的）社会存续、（科技创新的）社会进步、（人的公本性进化的）社会进化等三大成分，并在其 Δ_i（不必是货币量）中析出相应成分来分析，这样可以对人类社会发展规律作出更为深刻的刻画（读者可继续作）.

三、调和分析

我们知道，傅里叶在 1807 年将一个一般的连续函数表示成三角级数，使“线

量”与“角量”这对“二象”对偶概念在级数意义下统一起来了．这是个伟大的突破．然后他又将欧拉公式（第三节、二）代入三角级数，使傅里叶级数变成复数域上的指数形式，从而产生了傅氏变换、傅氏积分和傅氏分析（又叫频谱分析、调和分析），并由此开辟了函数论上又一个广阔的领域．它对探索函数空间的性质、微分方程解理论，并在数据处理、数值计算上都是得力工具．其中褶积变换和小波分析就是在此基础上产生的有名的应用分支．鉴于小波分析在应用上的重要性，拟作为一节（下节）来讨论．为节省篇幅，包括这里提到的从傅氏级数到傅氏积分的思想来源，都将留到下节去交代，这里仅就调和分析简单谈几句．

调和分析是利用傅氏工具在复数域上进行的函数论研究，以探讨函数空间的深层结构．具体说是，在傅氏积分和傅氏变换基础上（比较式（8.10）与式（8.20）即知），对于实函数 $f(x)$，若 $D(f)=\mathbf{R}$，则可把 $f(x)$ 表示成简谐振动（又叫调和振动）$e^{it\alpha}$ 的迭加形式

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\alpha}d\alpha(t) \tag{8.10}$$

来研究，其中 $\alpha(t)$ 是 R 上具有右连续且有有界变差（即无竖直渐近线）的复值函数，$d\alpha(t)$ 表示 $f(x)$ 中含有 $e^{it\alpha}$ 的份量大小，所以叫它做**权函数**．

调和分析之得名是因为如式（8.10），对 f 的分析依赖于调和振动 $e^{it\alpha}$．“调和分析”与“调和函数”是不同的概念，后者系指满足拉普拉斯方程

$$\Delta u(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

的（二阶连续可导）函数 $u(x)$．不过还可注意到调和函数 $u(x)$ 的调和性与条件

（1）调和分析中能量有限条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|f|^2 dx<+\infty$；

（2）加速度为 0 的保守系统；

（3）辛几何中的 $d\omega^2=0$

等之间是有内在联系的．由此看到，调和函数与调和分析的函数之间也具有丰富的内在联系．

第五节　小波分析基本认识

小波分析（wevelete）是 20 世纪 80 年代末才形成的一门有关数据和信息处理的应用技术和基础理论，被美国数学会列为 21 世纪振兴美国经济的 16 项理论

研究的第八个方向．显然，在信息时代的今天和明天，它的走俏是必然的．关于小波理论著作已越来越多，这里不可能作全面介绍，现仅就一般书上未曾谈及的关于阅读小波理论的一些前提性知识和思想做一些交代，以利于进一步学习．

一、傅氏级数小史与实质

1．小　史

傅里叶（Fourier，法，1768—1830 年）曾任高等工艺学院教授，政府官员，后来从事热工实验，于 1807 年提出，1816 年表述其思想，并于 1822 年发表的“热的解析理论”等两篇文章中正式提出“任一连续函数皆可表为三角函数级数”理论．但遗憾的是，自公之于世以来就一直受到数学界的批评，以至于在他生命的最后十几年，一直处于孤立地为奠定傅氏级数的基础而苦苦奋斗之中，如今见到的傅氏级数基础理论基本上都是他当初的个人成果．真希望历史不要再出现这样的憾事了．

傅氏级数的发展可归为理论和方法两个方面：前者主要是傅氏分析、调和分析等；后者主要指傅氏变换、快速傅氏变换（褶积变换）和小波分析等．傅氏工具在滤波、天线、光学和数值分析、信息处理、随机过程、量子力学等科学领域都有广泛应用．

2．傅氏级数的思想实质

悉知直线和圆是平面曲线中两个基本的“拓扑类”，但在 $\mathbf{R}^3$ 中它们可以成为一个等价类．因为比如 $\mathbf{R}^2$ 中的圆 $\varphi(x,y)\equiv x^2+y^2=1$ 可通过引入参数化为 $\mathbf{R}^3$ 中一条无穷（非闭）螺线

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

一般地，对 $y=\phi(x)$ 皆可有 $\mathbf{R}^3$ 的

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=\phi(x(t))=y(t) \end{cases}$$

比如当取 $x(t)=\cos t$ 时，$y=\phi(\cos t)$．由此可见“线量”和“角量”两个基本变量是可以转化的，只是要提高一维空间[①]．事实上的确如此．比如，幂级数正是函数（包括角量函数）的线量展开，傅氏级数正是函数（包括线量）的角量展开，

① 这一实质也含于已述及的线量、角量间的无穷级数关系之中．

不过仔细观之，它们是提高了空间维数的，这就是由无穷项（无穷序号）表现出的时间参数维[①].

对于上述一般参数（方程组）形式

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

也可表为向量式

$$(x, y) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}^2$$

还可表为标量式

$$Z(t) = ax(t) + by(t) = (a, b)\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

a, b 是相应“虚象”（对偶空间）变量（参数）.

同时还可看到，比如方程 $m\ddot{Z} + bZ = 0$ 的通解函数即有上述形式，即

$$\begin{aligned} Z = Z(t) &= A\cos(kt + \phi) \\ &= A\cos\phi\cos kt - A\sin\phi\sin kt \quad \left(k = \sqrt{\frac{b}{m}}\right) \\ &= C_1\cos kt + C_2\sin kt \quad (\phi\text{为初始相位}) \\ &= (C_1 \ \ C_2)\begin{pmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{pmatrix} = (C_1 \ \ C_2)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.11}$$

由此启示我们，对于一般函数 $y = f(x)$，是否可用高阶的（8.11）型表出，或说它是否可用 x 的三角函数式来作角量展开呢？

二、$f(x)$的三角表达式及其条件讨论

对于上段末的问题，我们注意到，若一般函数 $y = f(x)$ 仅按式（8.11）形式表成 x 的三角函数，并未提高空间维数，但据“一”段讨论必须提高一维空间（增加一个参变量）才行. 怎么办？为此想到比如在式（8.11）中视 t 为 x，另取诸如 k 作为参变量. 为使式（8.11）中 k 为参变量，只要对 k 取无穷项求和，即可体现出 k 的参变量特征了，此即形式

---

① 从二象对偶观（第四章第二节）也可见线量与角量间之实虚二象关系. 泰劳级数与付氏级数间也具有二象实质.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos(kx+\phi)\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \tag{8.12}$$

显然式（8.12）仅是猜测性的结构，只是“形式”上的三角级数，它是否成立，还需要进一步考察．

对于式（8.12）在什么条件下才成立，有三种情形：一种是无条件成立，显然不可能；另一种是无论什么条件下都不成立，即说式（8.12）根本不可能；第三种是有条件的成立，即只要找出适当条件，便可使（8.12）型展式成立．对于第三种情形，前人已找出相应条件：

（1）$f(x)$ 必须在任意有限区间上满足**狄利克雷条件**，即最多只有有限个一类（跳跃）间断点和极值点情形．

（2）$f(x)$ 在全 $\mathbf{R}$ 上绝对平方可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<+\infty$，又叫做能量有限，这是合符实际的；否则若实践中一个系统的能量无限，那是不可想象的，至少是不稳定的、无法控制的系统，甚至是个混沌系统．

总的说来，$f(x)$ 的三角级数展开，其条件是很弱的，特别还有更利于具体展开的规律如下．

三、正交基与 $f(x)$ 的傅氏级数

1．正交基

（1）三角正交系．

对于无穷组 $\Lambda=\{\cos nx,\sin nx\mid n=0,1,2,\cdots\}$，因其满足

$$\int_C^{C+2\pi}\cos nx\cos Jx\,\mathrm{d}\pi=\begin{cases}\pi, & n=J\neq 0\\ 0, & n\neq J\end{cases}$$

$$\int_C^{C+2\pi}\sin nx\sin Jx\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & n=J\neq 0\\ 0, & n\neq J\end{cases}$$

$$\int_C^{C+2\pi}1^2\,\mathrm{d}x=2\pi$$

Λ 叫做**三角正交系**（其中 C 为任一实数）

这里“正交系”概念来自三维空间 (x,y,z) 中“单位正交系”，记为 (i,j,k)，它有点乘关系，各元素自乘为 1、互乘为 0．推广此特征正好对应着 Λ 中元素在任一个周期集上自乘或互乘的累加值特征．

注意到，比如 $\{\cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbf{R}\}$，$\{\cos nx \mid n \in \mathbf{R}\}$ 或 $\{\sin nx \mid n \in \mathbf{R}\}$ 等皆不构成三角正交系.

(2) 三角正交基.

参照 Λ 系和式（8.12）的构成，自然产生一个概念，即任一个满足狄利克雷条件的函数皆可用 Λ 系表示出来，并仿有限维线性空间“基”的概念而把 Λ 叫做**三角正交基**. 用正交基表出的对象没有交叉项，简单清爽. 由于一般说基总可正交化，所以以下简称正交基为基.

既然有“基”，就有空间，我们把所有能用 Λ 线性表出的函数集叫做**函数空间**，记为 $L^2(R)$. 实则因为这时的任一函数皆满足“二、(2)”之故.

事实上，我们现在已经在线性泛函（至今通称的泛函皆线性泛函）内讨论问题了，而且我们所讨论的 $L^2(R)$ 空间属于希尔伯特空间（完备的内积空间，完备即其一切柯西序列收敛于其内），也正是希氏首先发现可用“基”表示的函数类.

亦如代数中线性空间理论，如果存在基必非唯一，在 $L^2(R)$ 中亦如此，即已得知 $L^2(R)$ 的基存在且非唯一.

注意到在小波理论中，空间 $L^2(R)$ 的基的表出和基的非唯一性等都是很重要的概念，也正是基的非唯一性给了我们去构造符合实践需求的优越基的可能，也奠定了小波分析的生机.

但也注意，比如 $\{\cos nx \mid n = 0,1,\cdots\}$ 或 $\{\sin nx \mid n = 0,1,\cdots\}$ 也是正交系，因此也可作为正交基. 但易见它们张成的空间只能是 $L^2(R)$ 的子空间，因为比如这样的两基皆属 $L^2(R)$，但两者不可相互表出，所以不能只取它们之任一组作为 $L^2(R)$ 的基.

2. $f(x)$ 的具体展成傅氏级数

在前面作了思想认识和具体条件准备的基础上，现进入到 $f(x)$ 的具体展开，这时还将遇到一些技术性困难需要克服，为此作如下由特殊到一般的逐步叙述.

(1) 对具有周期 T 的函数 $f_T(x)$ 的展开.

这时据式（8.12），首先令

$$f_T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{8.13}$$

然后据正交基的性质来求出 a_k, b_k. 但可看出由 T 的任意性，T 与三角函数的固有周期 2π 不谐和，为了变成在 T 周期上利用正交基的正交性，可令变换 $x = \omega x'$，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$（也叫频率），并为方便计仍记 x' 为 x，再注意到从定义域 R 上宏观来看，$f(\omega x)$ 与 $f(x)$ 是同一条曲线，所以作为整体可有 $f_T(x)$ 的展开式

$$f_T(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x \tag{8.14}$$

并以此来求出 a_k,b_k，则式（8.14）成为严格等式了．为此，分别用 $\cos k\omega x$，$\sin k\omega x$（这里 k 暂视为一定）通乘式（8.14）并在一个周期内（比如在记为 $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 的周期上）积分，右端只剩下一项非 0，即

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}a_k\cos^2 k\omega x\,\mathrm{d}x\\&=a_k\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{1+\cos 2k\omega x}{2}\mathrm{d}x=a_k\frac{T}{2}\end{aligned}$$

所以

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x,\quad (k=1,2,\cdots) \tag{8.15}$$

特别地，当 $k=0$ 时有

$$a_0'=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\,\mathrm{d}x$$

为使表示系数的公式统一，可表作 $a_0'=\frac{1}{2}a_0$，从而

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\,\mathrm{d}x$$

同理算得

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x,\ k=1,2,\cdots \tag{8.16}$$

于是 $f_T(x)$ 的傅氏级数具体为:

$$\begin{cases}f_T(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\\ a_k(\text{包括}k=0)\text{见(8.15)式，}b_k\text{见(8.16)式}\end{cases} \tag{8.17}$$

（2）非周期函数 $f(x)$ 的傅氏级数．

非周期即 $T\to\infty$，所以只须对 $f(x)$ 先展成 $f_T(x)$ 型的展式（8.17)，再取极限 $\lim\limits_{T\to\infty}f_T(x)$ 即成．为省篇幅，具体作法见下段．

这里给出一图例．在图 8.4 中① 为原始函数 $f(x)$，无周期；② 是按 T_1 周期作周期性展开后的函数；③ 是将周期 T_1 扩大成 T_2 后的展开图形，如此下去，当 $T_1 \to T_2 \to \cdots \to T_\infty$ 时即得 $f(x)$ 本身．

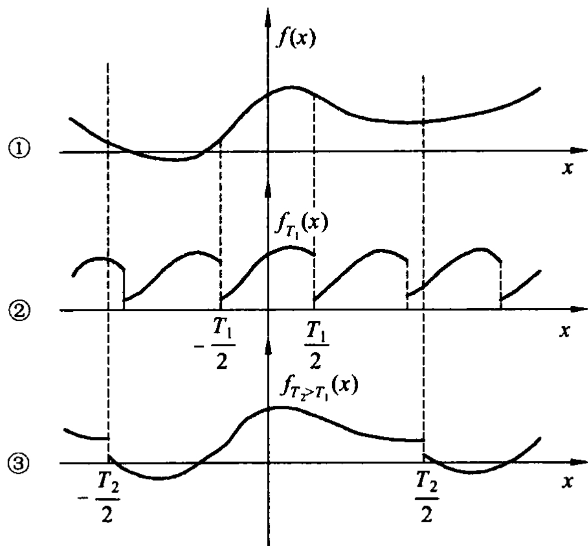


图 8.4

问题：试考察幂级数与傅氏级数的异同点．

四、傅氏变换、傅氏积分及其基本性质

1．傅氏变换与傅氏积分

先从周期函数 $f_T(x)$ 作起，在式（8.17）中代入欧拉公式

$$\cos k\omega x = \frac{e^{ik\omega x} + e^{-ik\omega x}}{2}, \quad \sin k\omega x = \frac{e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}}{2i}$$

后，得到

$$f_T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ik\omega x} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ik\omega x}\right] \tag{8.18}$$

注意到式（8.18）中 k 取作 $-k$ 时有 $b_{-k} = -b_k$，再记 $b_0 = 0$，取 $k \in (-\infty, +\infty)$，则式（8.18）可简化为

$$f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ik\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k e^{ik\omega x} \tag{8.19}$$

其中

$$C_k=\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)(\cos k\omega x-\mathrm{i}\sin k\omega x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x}\mathrm{d}x \quad \text{（代入 } a_k,b_k \text{ 表达式而来）}$$

所以

$$f_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}\omega\triangleq\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_T(k\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega x}\Delta k\omega \qquad (8.19)'$$

注：因有形式 $\omega=\frac{\mathrm{d}k\omega}{\mathrm{d}k}$，这时 ω 是常量，k 是整变量，其增量 $\Delta k=1$，所以式中有

$$\omega=\omega\cdot 1=\omega\Delta k=\Delta k\omega\ ,\quad \hat{f}_T(k\omega)=\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega x}\mathrm{d}x\right].$$

这时让 T 作为变量任意增大，由于 $k\omega=2\pi\frac{k}{T}$，当 k 一定时取 T 任意大，则 $k\omega$ 可任意小．这时记 $k\omega=\omega_k$ 且容易看出，它意味着式 $(8.19)'$ 中"$\sum$"在任意有限区间内的项数得到任意加倍，或说相应区间被任意细地等分（等分区间长为 $\frac{2\pi}{T}=\omega$）；再注意到始终有 $k\in(-\infty,+\infty)$，因此据定积分定义，式 $(8.19)'$ 中"$\sum$"是对于 ω_k 的积分和，特别当取 $T\to\infty$ 时 $\lim\limits_{T\to\infty}\omega_k$ 成为连续变量的 ω，且式 $(8.19)'$ 中 $\Delta k\omega=\Delta\omega_k\to\mathrm{d}\omega$．从而对于式 $(8.19)'$，并为以后方便计，将系数进行调整后，有

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}f_T(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$
$$\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega\text{——傅氏积分} \qquad (8.20)$$

其中

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\text{——傅氏变换} \qquad (8.21)$$

2．傅氏变换与傅氏积分的意义

$f(x)$ 的傅氏变换 $\hat{f}$ 表示 $f(x)$ 中属于频率为 ω 的谐波成分（权重）在 x 轴上的

代数累积量（因为积分是无穷项的代数求和），由于是关于振动的量，所以 $\hat{f}$ 是复值．傅氏积分说明一个很一般的非周期函数 $f(x)$ 都可以表为所谓标准函数（调和振动）$\mathrm{e}^{\mathrm{i}wx}$ 在权函数 $\hat{f}(\omega)$ 下作频率迭加．

总之，一个一元函数 $f(x)$ 被表成了含时间（x 表时间意义）和频率 ω 这样虚实二象的“完全空间”中的形式，其技巧是令人惊异的．由此还可窃知，这一表达形式上的转换非同小可，它给 $f(x)$ 的研究带来了大大的生机．

3．傅氏变换与傅氏积分的性质

（1）线性性：

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)+g(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}\mathrm{d}x=\hat{f}(\omega)+\hat{g}(\omega)$$

（2）对称性：

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}wx}\mathrm{d}\omega$$

（3）时间尺度 x、频率尺度 ω 可变：如上述过程，可对 x,ω 作伸缩变换（取系数）．

（4）但 x,ω（时-频）不能平移：不能作（+，－量的）平移变换．

4．傅氏变换与傅氏积分的缺点

今天看来式（8.20）及式（8.21）是有缺点的，主要是：

（1）x,ω 皆只能在 $(-\infty,+\infty)$ 上变，不具有局部性，无法用来对 $f(x)$ 作局部处理．

（2）不能给出一般空间 $L^p(R)$ $(p\neq 2)$ 上“无条件基”（因 L^p 一般只能属于 Banach 空间（完备赋范空间），比 H-空间弱）．

总之，产生这些缺点的一个根本原因是它的正交基不理想，根据基的非唯一性，可能并亟须寻找一个好的新基．换句话说，需要寻找一个好的新基和新变换，以克服上述缺点，统一叫做“小波变换”．

五、小波变换基本发展过程

小波变换是目前有关方面流行书籍上常有的内容，限于篇幅和本书使命不能详谈，这里仅从简略述（依历史顺序）．

1．傅氏变换

改记为

$$\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}_{\omega}f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\left\langle f(x),\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right\rangle \tag{8.22}$$

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R}\mathscr{F}_{\omega}f\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\left\langle \mathscr{F}_{\omega}f,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\right\rangle$$

其中“$\langle,\rangle$”为内积符号.

2．Harr 小波变换

Harr 于 1909 年首次提出小波和正交基概念，并提出时-频的伸缩和平移思想，更建立了一套 H-变换如下：

先给出 H-母函数为

$$h(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ -1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\\ 0, & x\,\overline{\in}\,[0,1]\end{cases}$$

显然有 $\int_{R}h(x)\mathrm{d}x=0$，所以 $h(x)$ 是谐波. 同时 $h(x)$ 有所谓“紧支集”[0,1]，因此 $h(x)$ 是小波（在局部区域上建立的谐波）.

再用 $h(x)$ 构造正交系为 $\{h(x-b),b\in\mathbf{R}\}$，则 $\forall f\in L^{2}(R)$，有 H-变换：

$$\mathscr{H}_{b}f=\int_{R}f(x)\bar{h}(x-b)\mathrm{d}x$$

及

$$f=\int_{R}\mathscr{H}_{b}fh(x-b)\mathrm{d}b$$

但毕竟这还是“第一架飞机”，不可指望它完善，亦即 H-变换仍有若干缺点，不满足需求，以致长期无人问津.

3．Gabor 窗口变换

1946 年 Gabor 提出了个 G-变换，记为

$$G_{p.b}f=\int_{R}f(x)\bar{g}(x-b)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x\triangleq\int_{R}f(x)\bar{g}_{p.b}(x)\mathrm{d}x$$

$$f=\int_{R^2}G_{p,b}f g(x-b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p\mathrm{d}b$$

其中 $g(x-b)$ 叫做窗口函数，它具有了时-频局部分析性，但形成不了 L^2 的正交基，所以仍不理想.

4．Meger 小波变换

1986 年 Meger 提出 M-变换：对 $\forall f\in L^2$，若有 $h(x)$，其傅氏变换为 $\hat{h}(\omega)$，满足"接纳条件" $C_h=2\pi\int_R\frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega<+\infty$，则有 M-变换

$$\begin{aligned}\psi_h f(a,b)&=\frac{1}{\sqrt{C_h}}\cdot\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_R f(x)\bar{h}\left(\frac{x-b}{a}\right)\mathrm{d}x\\&=\left\langle\frac{1}{\sqrt{C_h}}f(x),\frac{1}{\sqrt{|a|}}\bar{h}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\sqrt{C_h}}\int_{R^2}\psi_h f(a,b)|a|^{-\frac{1}{2}}\cdot h\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{C_h}}\int_{R^2}\psi_h f(a,b)h_{a,b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\end{aligned}$$

其中 $h_{a,b}$ 为小波标准函数，相应于式（8.22）中标准函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$. 比如取 a,b 为正整数 m,n 时即可构造出一个小波基

$$h_{m,n}=|a_0|^{-\frac{m}{2}}h(a_0^{-m}x-nb_0)$$

这里 $|a_0|^{-\frac{m}{2}}$ 决定了振幅的可变性，$a_0^{-m}x$ 项决定了时-频伸缩性，$-nb_0$ 表示平移性.

小波变换的关键是构造母小波函数 $h(x)$，从而产生基 $\{h_{m,n}(x)\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$ 再产生变换式. M-变换虽然是成功的，但不足之处也有两点：一是不能给别人一种构造小波函数的规范模式，不利推广；二是未能形成具体算法，也不利推广. 因此小波分析之热还不是由 M-变换掀起的.

5．多尺度分析

1989 年 Meger 和 Mallat 分别提出了多尺度分析，归结起来主要有两点贡献：一个是给出了小波分析快速算法，叫做 Mallat 塔式算法；另一个是提出了"规范

（范数皆 1 的）正交基” $\{h_{j_k}\}$ 概念，即满足

$$\left\langle h_{j_1,k_1}, h_{j_2,k_2} \right\rangle = \int_{R^2} h_{j_1,k_1} h_{j_2,k_2} \mathrm{d}j_1 \mathrm{d}k_2 = \begin{cases} 0, & j_1 \neq j_2 \text{ 或 } k_1 \neq k_2 \\ 1, & j_1 = j_2,\ k_1 = k_2 \end{cases}$$

由此，若 $L^2(R)$ 中能构造出规范正交基 $\{h_{j,k}\}$，则 $\forall f \in L^2$，必有多尺度变换

$$\{\alpha_h\} \ni f(x) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \alpha_{j_k} h_{j_k}$$

其中 h_{j_k} 具有很好的时-频局部性.

多尺度分析的基本思想是在 $L^2(R)$ 中找出一列满足（前述）5 条要求的子空间套 $\{V_j\}$，把它叫做 L^2 的多尺度逼近，进而对每个 V_j 构造出规范正交基，再构造出 $\{V_j\}$ 的尺度函数的“频率响应函数”和“传递函数（共轭滤波器）”，从而求出 $L^2(R)$ 的规范正交基即成.

尽管 Mallat 塔氏算法简单，由于未给出多尺度分析基本过程的形式语言，难以具体叙述，兹免．作为一个应用例，现转述一个用小波变换进行图像压缩的编码流程图如下：

具体步骤是：

（1）用 Mallat 塔形算法将图像分解为亮度、水平边缘、竖直边缘、对角边缘等分量；

（2）根据需要对四个子图作出不同策略的编码处理；

（3）解码；

（4）逆变换，还原成原图像（见图 8.5）.

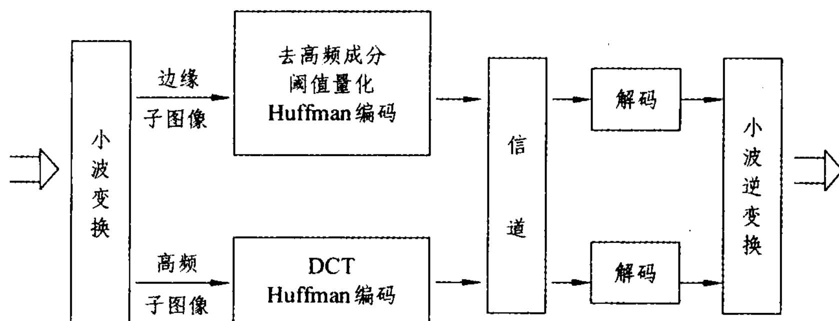


图 8.5

第六节　周期力学

我们看到，周期数学的应用性是十分强的，即使其中理论性很强的部分如复分析、调和分析等也是直接为着应用的理论基础．特别地，周期数学更与力学的关系最为密切，这是因为力学中有关振动、弹性、波动、信息等理论和应用十分丰富，这些都属于直接的“周期”理论．

一、振动理论认识

振动是弹性物质受到瞬时力或说突发力后产生的一种回复现象，这时物质将改变原始形态而相对于原有平衡位置作来回运动，因此振动与弹性是分不开的．严格说没有突发力产生不了振动，没有弹性也产生不了振动．

如今振动概念已大大推广，除了经典的丰富而复杂的机械振动外，还有自然振动、电磁振动（振荡）和非物质振动等．**自然振动**如天体的运动状态、量子世界基本粒子的运动状态和地震等等．这是天然的运动状态，可以认识它、利用它、防避它，但至少目前还谈不上创造或改造它．至于**电磁振动**，诸如电子振荡器，交流电回路的种种振荡等等．电磁振荡中既有人工制作的类型也有自然的类型．

上述这些皆属物质对象的振动问题．至于非物质对象的振动现象也不少，诸如一个新闻振动了社会、经济上的周期振动、市场上的弹性振动，乃至生活中的振奋、振兴、振作等等概念皆属于此．

总之，不管是振动理论还是振动技术都是为着人类认识自然、掌握自然、利用自然的，最终是为着人类谋福利的．

但有一点，这里所说“振动”是以时间作为自变量的一种运动，这是与下段“波动”的本质区别之一．关于物质对象的振动理论和模型研究，历史悠久，已较成熟，著作也多，可以说它与常微分方程定性理论和一般动力系统理论是一家子，读者已较熟悉．现作为一例仅给出一个市场振动模型如下：

例 4　一类商品短缺所引起的市场振动模型（参见《应用数学与力学》，12(1997)）．

设市场经济系统为(P,Q)，P为价格空间，Q为商品空间（(P,Q)是含共轭二象的完全空间），再记需求向量为$\boldsymbol{D}=(D_1,\cdots,D_k)$，供给向量为$\boldsymbol{S}=(S_1,\cdots,S_k)$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{S}\in Q$，再设商品间有弹性替代关系，记$b_{ij}$为第$i$商品对$j$商品的弹性替代系数，则在某一瞬时（一次短缺）作用下，该市场开始振动，其振动过程（记为$\{F_i\}$）如下（先给出前几步图示然后给出说明）：

F_0	S_1	S_2	$\cdots$	S_k
D_1	S_1	0	$\cdots$	0
D_2	0	S_2	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
D_k	0	0	$\cdots$	S_k

F_1	S_1	S_2	$\cdots$	S_k
D_1'	$(1+\Delta p_1^1/p_1)S_1$	0	$\cdots$	0
$\Rightarrow$ D_2'	0	$(1+\Delta p_2^1/p_2)S_2$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
D_k	0	0	$\cdots$	$(1+\Delta p_k^1/p_k)S_k$

F_2	S_1	S_2	$\cdots$	S_k
D_1	$S_1+a_{11}^1$	a_{12}^1	$\cdots$	a_{1k}^1
$\Rightarrow$ D_2	a_{21}^1	$S_2+a_{22}^1$	$\cdots$	a_{2k}^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
D_k	a_{k1}^1	a_{k2}^1	$\cdots$	$S_k+a_{kk}^1$

F_3	S_1	S_2	$\cdots$	S_k
D_1	$(1+\Delta p_1^2/p_1)S_1$	0	$\cdots$	0
$\Rightarrow$ D_2	0	$(1+\Delta p_2^2/p_2)S_2$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
D_k	0	0	$\cdots$	$(1+\Delta p_k^2/p_k)S_k$

F_4	S_1	S_2	$\cdots$	S_k
D_1	$S_1+a_{11}^2$	a_{12}^2	$\cdots$	a_{1k}^2
$\Rightarrow$ D_2	a_{21}^2	$S_2+a_{22}^2$	$\cdots$	a_{2k}^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
D_k	a_{k1}^2	a_{k2}^2	$\cdots$	$S_k+a_{kk}^2$

F_5	S_1	S_2	$\cdots$	S_k
$\Rightarrow$ D_1	$(1+\Delta p_1^3/p_1)S_1$	0	$\cdots$	0
D_2	0	$(1+\Delta p_2^3/p_2)S_2$	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
D_k	0	0	$\cdots$	$(1+\Delta p_k^3/p_k)S_k$

其中F_0表示供需均衡的正常情形.

F_1表示：某周期中需求突增至D'，从而产生暂时短缺，市场受到一个突发力作用. 由于$D_i' = S_i + \Delta S_i$，据市场经济特征，这时商家将作出相应的提价反应，以使$p_i D_i' = (p_i + \Delta p_i^1) S_i$，所以

$$D_i' = (1 + \Delta p_i^1 / p_i) S_i$$

F_2表示：F_1中超需求量ΔS_i不可能完全由S_i来供给，于是在提价Δp_i^1之反作用下由商品间弹性替代关系将$\Delta S_i = (\Delta p_i^1 / p_i) S_i$按$b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{ik})$的比例自然地"分流（传播）"到其他商品去购买，这就是F_2中矩阵形式. 其中有

$$a_{ij}^1 = b_{ij} \frac{\Delta p_i^1}{p_i} S_i, \quad \sum_{j=1}^{k} b_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

F_3表示：经F_2的自然分流后，S_j列向量为对S_j的新的需求向量（第二次振动），它等价于D_i的新需求

$$S_i + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^1 \triangleq S_i + \Delta S_i^1$$

据F_1的理由这时S_i商家作出新的喊价$p_i + \Delta p_i^2$，使得

$$S_i + \Delta S_i^1 = (1 + \Delta p_i^2 / p_i) S_i$$

F_4同F_2理，F_3中S_i的超需部分$(\Delta p_i^2 / p_i) S_i = \Delta S_i^2$自然地按$b_i$中各分量的比例分流（传播）给其他商品去购买，此时为F_4的分布状态，亦即$a_{ij}^2 = b_{ij} (\Delta p_i^2 / p_i) S_i$.

如此类推即得序列$\{F_i\}, i = 1, 2, \cdots$.

容易证明$\{F_i\}$是个离散动力系统，并且可证明它等价于一个经典的**振动方程**（本章式（8.3）)，还能得到它的更多性质（兹免见记）.

二、波动理论认识

1. 概念及特性认识

波与振动也密不可分，因为波是振动的传播形式，或一般地说波是能量传输的"一种"基本形式. 所谓"一种"是因为，如今能量的概念很广泛，能量的形式也很多，其传输方式自然非唯一. 显然介观世界表现出的能量，其基本形式只有动能和势能两种（当然不能把能量与油、煤、水利等"能源"相混），但从能量的物质特征来讲，却有很多种，诸如机械能、电能、热能、光能和物质能等. 后

者是根据爱因斯坦方程 $E=C^2m$，说明物质本身就是能量，包括电、光、热等场物质亦然．特别地，如今还认识到作为非物质的“信息”也是一种能量，它不同于传递信息的电、声、光等能量本身，而是来得更为抽象．

对于所有这些能量形式，它们的一个重要传输方式就是通过“波”，这种波或者由介质的振动产生，或者是能量自身的场辐射．不同能量的传播波，其波幅、波频有所不同．波频低者即为通常的**波**；波频高者，可叫做**射线**，这时成了波和射线二象匹拟的状态，如光线、热辐射和高频电磁波等．

波动理论在科技实践中不可谓不重要．从经典意义讲，波可以传播扩散能量，以减轻机械冲击的振动，减轻地震中心的破坏．不敢想象，如果客观世界没有了“波”，那是何等的可怕，又是何等的不方便，因为特别在近现代以来，人类利用波来传递信息已达到如此密切的地步．以致可以说离开了波就没有了我们的现代化．

“波”还有两个特点：一个是它在传输过程中能量损耗很小．另一个是，来自不同振动源的两个波在同一传播空间中，尽管在经历点其波幅（振幅）会迭加，但两波的能量是各自独立的．例如，对起自水波问题的有名的 KdV-方程：

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0$$

一个多世纪来的丰富研究表明在多种波（包括电磁波）上都有上述特性．典型的有如孤立波（solitong）等．

这些表明构成波的因素不只是个（一维的）能量值问题，至少还有时、频和方向等因素．也正是波的这些特性为现代信息传播和通信带来了极大好处．

关于波的理论，其历史较之振动理论要来得晚一些，尽管波与振动的关系是密切的，但其理论特征有较大的不同．一般说振动系统仅以时间 t 作为自变量来讨论，或说是作为质点（在原地作非传播式）的运动，至少在介观意义下的振动理论主要属常微分方程、动力系统领域，而波动理论一般是多元的，不仅以 t 为自变量而且主要属（如下的）偏微分方程领域．

2．偏微分方程小议

偏微分方程发展的历史较短，在 20 世纪上半叶才形成学科，且发展较慢．直到今天，通常所说“偏微分方程论”（简称“偏微”）仍然仅指作为大学生基础课的《偏微分方程论》，又叫做《数理方程论》．这是因为“偏微”讨论的主要内容是多元二阶微分方程，这种方程主要是以物理力学作为背景提出来的或更一般地说成是物理空间 $R^3\times T$ 内提出的实际问题，主要可归结为三大类型的偏微分方程模型．

（1）热传导方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z)\triangleq a^2\Delta u+F \tag{8.23}$$

其中 F 是控制项，当 $F=0$ 则成为齐次热传导方程．顾名思义，式（8.23）是典型的热能传播的数学模型，数学上又叫做“抛物型方程”．这是根据其“特征多项式”来定的．因为对于典型方程（8.23），它正好类似于代数的抛物面方程 $u=ax^2+by^2+cz^2+d$，于是可简单地以此来帮助我们记忆该方程类型．

（2）波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z)\triangleq a^2\Delta u+F \tag{8.24}$$

F 的含义同式（8.22）．应当说明，波动方程是比较复杂的，因为它至少可以分为弦振动（一维）、膜振动（二维）、空间振动（三维）等三种类型．实际上模型（8.24）是十分典型的“声学方程”（三维振动）．比如声振动中的声压、介质密度、速度势等指标量皆满足此方程．至于膜振动模型，则形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y) \tag{8.25}$$

$F(x,y)$ 系强迫项或叫控制项，当 $F=0$ 则成为齐次型问题．最后，弦振动模型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x) \tag{8.26}$$

波动方程在数学上又叫做**双曲型方程**，与式（8.22）的解释同理，也可简单地比喻为它类似于代数的双曲型方程 $u^2-(ax^2+by^2+cz^2)=F$．

（3）调和方程．

有两种类型：

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \text{——拉普拉斯方程} \tag{8.27}$$

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=F(x,y,z) \text{——泊松方程} \tag{8.28}$$

已经知道，这是研究调和函数的典型模型．调和函数论既是分析学中一个重要分支学科，又是具有广泛应用的一个函数类，诸如流体力学、温度场研究等，

可以说一切能量有限的场合都有它的用处．这是因为我们曾说过，调和函数与加速度为 0 的场合、能量有限的场合、(流形理论中) 保守场及外微分形式 $d\omega^2=0$ 的场合等都有内在联系．的确，如果赋予它们不同的定解条件，即可以产生出多种类型的问题来，诸如狄利克雷问题、拉普拉斯外问题、牛曼问题等．

调和方程又叫椭圆方程，其得名原理同上．

最后应当谈到，式 (8.23) ～(8.28) 中，虽说只有式 (8.24)～(8.27) 叫波动方程，但显然它们研究的也都是具有波实质的问题，特别是都有关于周期函数、复域上函数的研究等．此外应当特别谈到，偏微分方程或说数理方程的理论和应用前景是十分可观的，特别对于“场”类对象的研究少不了它，但也需要看到它的困难性．

正由于其困难性，该门学科的形成才比较晚．也因为其困难性，至今还在二阶偏微方程领域奋斗，甚至可以看到，今后相当长时间内，也许“偏微”理论主要的还将在二阶领域奋斗．同时，“偏微”问题总要化为“定解问题”来解（上述方程附上边值条件，初始条件或初边值条件等条件之一即形成定解问题)，而不是求“通解”，其原因之一也在于“偏微”的困难性．

第九章　数学按其描述特征的几种类型认识

第一节　确定性数学

“确定性数学”又叫必然数学，这一提法是相对于“不确定性数学”（即随机数学和模糊数学）来说的，因此这种提法产生于现代．确定性数学即不确定数学以外的数学全部，从古至今它都是数学的主体，也是本书的绝对主要内容，所以本节自然不可能对其作出全面评价，仅就前面未曾正面谈及的确定性数学中“数值性”和“分析性”两个方面特征作一简述．

一、连续数学与离散数学

1．连续数学

连续数学是具有“分析性”的数学范畴．这是在17世纪初笛卡儿发明“坐标系”以后迅速兴起的数学领域，是当今数学最为活跃的方面，可谓“大半边天”了．在本书中也体现为这样，因此在这里只需作如下略略提及即可：

（1）连续数学的**基本概念**，主要是“邻域”和“极限”，其次是“函数”和“连续”．简单说函数的“连续”是：对应于定义域（D）内自变量（x）的任一取值（$x\in D$），如果它的函数值（$f(x)$）确定，则必存在一个邻域（$N(x)\subset D$）使得在其内函数值皆确定且必能任意靠近这一函数值$f(x)$．

从其所属“数域”来看，连续数学所属的是连续统域（实R^n或复C^n）；离散数学所属的是有理数域（实R_r^n或复C_r^n）．

（2）连续数学的**基本手段**，也叫基本方法，那就是“微积分”，至少具有微积分的实质．

（3）连续数学的**基本特征**，此即（在坐标系下[①]）几何空间的直观形象性强，这更能体现（数学定义语）“数与形的结合”，更能提升分析的层次．

---

① 虽说“点集拓扑学”可以不直接依赖于坐标系，但本质上仍少不了坐标系的空间思想．

因此把这一连续数学领域叫做“数学分析”领域，简称分析学领域.

2. 离散数学

这一来即明白了，所谓“离散数学”，简单说就是非分析学的数学领域，或即以孤立的（点式）数值或孤立事物（集）作为研究对象的数学范畴. 其基本特点是不依赖坐标系，不需要邻域概念，是建立在有理数域（R_r^n 或 C_r^n）上的，因此说它具有“数值性”、“离散性”.

“离散数学”可分为“基础理论”和“计算方法”这样两大类型:

前者（基础理论型离散数学）主要有代数学、数论、组合数学、图论、数值分析学、数理统计学以及数理逻辑学等. 这些学科的特点是不仅具有离散性特征，而且是直接作为后者（计算方法）的理论基础. 特别地，由此特点亦可见，第三节将讨论的“离散动力系统”虽亦涉及“离散”却不应属于离散数学范畴.

后者（计算方法型离散数学）是建立在前者基础上的所谓“硬”数学，不仅要（理论地）创建出方法，而且要能实地运作，作出“数”地实现. 具体说，作为“硬”数学的“计算方法”，可分为数值数学、数据数学、数码数学三个方面来认识.

(1) **数值数学**. 顾名思义，这是离散数学中以数“值”或叫数“量”为核心对象和目标的学科范畴，系研究数值的计算方法和数值的具体获得.

由于“数值性”是离散数学的基本特征，所以在坐标系诞生前“数值数学”便是数学的全部内容. 这不仅在算术、初等数论和“文字代数”方面如此，而且在三角函数方面也如此. 即使当时以点、线、圆为基本对象的欧几里得几何学也是这样的，这点不必赘述.

在坐标系诞生后，虽然数学的主要特点是“分析学”进而导致数值数学的地位有所减弱，但出于“数”在数学中的基本地位，它仍在发展.

特别在 19 世纪后半叶以来，由于**应用数学**的崛起和（20 世纪中叶）**计算机科学**的迅速发展使得数值数学更逢生机.

这是因为，一方面“应用数学”的最终成果一般都将归为“数值”的实现；另一方面，一切数学课题只有“数值化”了才能上机，而一旦能上机将远远强于人力. 所以这时即使连续数学也在离散化、数值化，以充分利用计算机工具，比如数值分析学、数值计算方法乃至“机器证明论”等学科就是这样产生的. 前两者主要是针对连续数学如微分方程等，以构建数值方法（用泛函等观点探索数值方法的步长、速度、收敛性、复杂性等)，或做技术性（近似）求解. 后者待见下段例.

(2) **数据数学**. 这是以“数据组”(或叫数据集，简称数据）为研究对象的学

科范畴，这时已不在乎个别的数“值”，而是在于（数据集）整体中含存的“信息”获取．它的数据来自历史记载、现场获取或网络获得．

特别在现代，诸如金融数据、网络数据的数量之大已成为数据“库”、数据“矿”、数据“海洋”，需要完成的是它们的数据处理、数据开发、数据挖掘等，研究越来越深入．

数据可归为“无序数据”和“有序数据”两大类，且各类数据的处理方法有较大差异．处理前者的基本工具典型地属于统计学（见第四节）；处理后者的工具常常是在统计学基础上还要根据问题特点，结合其他有关学科知识．比如已较流行的“时序分析”就是如此．特别如“粗糙集分析”，其运算虽然简单，但其中各种“关系”似显复杂．不过这时若用“二象”观和矩阵式去区分和描述它们，即会显得更容易把握其实质、理顺其思路了．关于“有序数据”，续见“第三节、一”．

在现代，数据数学是归属于计算机科学的（续见“二”段）．

(3) **数码数学**．这是把数字仅作为一种**符号**来用的数学，它既不在乎其（作为）“数值”的量，也不在乎其（作为）“数据”的内涵信息，而是人为地赋予“数码”以新的信息．换句话说，是要让数码来携带制作者需要它传递的信息（而不是像数据数学那样去探索数据中客观含存的信息）．我们把这样的数学叫做数码数学．

显然，数码数学应包括组合数学、编码译码学、通信信息学、模拟仿真学、图像信息学、网络信息学等．

数码数学是归属于信息科学的，或说是等价于信息数学的（续见下段“二 2”）．

数码数学是 $\mathbf{R}_r$ 的子集上的数学，$\mathbf{R}_r$ 的稠密性给了它及其信息科学充分的活力．

二、计算机数学与信息科学

1．计算机数学

所谓“计算机数学”，原则上是围绕计算机科学软件、硬件（二象）中“软”象所需要的数学．出于计算机科学的强大生机，它吸引了（或说扩展到）越来越多数学学科，包括基础理论的、方法构建的、程序设计与软件编制的等．这样形成的学科群叫做“计算机数学”．可以说“计算机数学”范畴已覆盖了离散数学．

计算机数学的发展，一方面是往连续数学渗透，诸如数值分析、数值解法、数值逼近（误差分析）等学科即具有这一特色．另一方面是使原来薄弱的方法因计算机而壮大成为学科．比如已成独立学科的“有限元法”，虽然其概念早已提出，但只是因为有了计算机才形成独立学科的．又如计算方法中的神经网络、遗传算法、仿真计算以及种种软件开发、软件工程、数据库知识、专家智能等的深入都

得益于计算机的激励．特别地，现例述一门也是属于计算机数学的、中国人创立的全新学科．

例 机器证明论．其思想可追溯到纯数学家在图灵思想基础上于20世纪上半叶提出来的，到1950年（美）进一步提出了几何定理的机器证明（代数化）思想，但此后25年没什么进展．还是中国科学院吴文俊院士于20世纪70年代打破了这一僵局，创造了Wu-Ritt特征集方法，简称“Wu法”，从而使几何的机器证明形成一门可归于“计算机数学”的新的学科分支①．特别自20世纪80年代末张景中院士和杨路教授介入该学科以来，先后又提出了作为机器证明论基础理论的求解非线性代数方程组的WE方法、WR方法、Dixon结式法，以及几何定理机器证明的WRsolve法、数值并行法、例证法等，特别还有结合张氏过去提出的“面积法”与“消点法”而形成革命性发展的“几何定理可读证明方法”以及杨氏的“非欧几何可读证明”、“几何不等式机器证明”等系列成果，大大推动了该学科的迅速发展．

机器证明学科能在中国得到领先性的发展，再次说明了“中国数学”具有的数值方法传统特征（构造性数学），并继续得到了发扬光大．

2．信息数学

信息数学系指信息科学“软”的部分，它以计算机为工具，研究以数码为载体的信息设计与运作规律，包括信息的编制、存取、转换、传输、获取、交流、控制等过程中的数学理论，主要用于通讯、遥控以及仿生、图像等学科领域．

由于“21世纪是信息的世纪”，“网络已发展成‘网络社会’—— 实在社会的虚拟象”，因此信息科学必将有更大发展，相应的“信息数学”必然大有前途．其相关著作将越来越多，这里只需强调几点：

（1）信息数学理应属于计算机数学，但因信息科学已从计算机科学中独立出来，所以信息数学也成为独立的方面．

（2）信息数学等价于数码数学，这就是“一、2（3）”谈到的内容．

（3）信息数学是有理数集（R_r）上的数学．这不仅因为（各种进制的）数码能表示任一（实）有限维空间所有有理点，而且能表示“多元数”空间所有有理点（注意到比如“二元数”（复数）的特征是能实现旋转，则一般“多元数”（在不要求构成“数域’时，也可有“三元数”等）可实现多向的旋转性．但比如（作为相对论基础的）“闵可夫斯基（时-空）空间”形式上虽是4维，但实质上是“虚、实二元”的，仅其时间维是虚的，其他三维是实的）．“多元数”是在比如作复杂的图像处理时（需要多向旋转、仿射等）的需要．

① 吴文俊也因此获得2001年中国国务院颁发的唯一两项自然科学特等奖奖项之一．

(4) 信息数学中基本运算仍然是加、乘（及其逆运算），或说是线性数学，不过多是高阶矩阵形式的线性问题.

以上属离散数学内容，下面的属分析数学.

三、分析数学 I：数学分析的发展

1. 小　序

“分析数学”也叫“分析学”，是以微积分方法为基本手段、以连续对象为基本用场的数学领域，也是相对于“数值数学”来的一种提法．本质上它也是数值数学基础上深化和抽象而成的.

*分析数学产生于如下三大突破：

第一个突破是根本性突破，此即**笛卡儿坐标系**概念的诞生，由此产生了函数概念．正是笛卡儿坐标系概念使人类对“数”的本质认识得到了深化，从而使数学变“活”了，产生了函数，并从此对“数”的认识与对函数的认识相辅相成、继续深化，其中对函数认识的深化则产生了第二个突破.

第二个突破是重大突破，诞生了微积分学，从而产生了数学分析也叫分析数学．如今“微积分学”的理论与方法皆已可谓成熟，运用十分广泛、灵便，被誉为算术化了的方法．微积分也对整个现代数学产生着深刻影响.

第三个突破是重要突破，此即发生自 19 世纪的集合论、实数理论、极限论、非欧几何和群论等系列大事件所掀起的数学“爆炸”性发展，从而产生了“现代数学”．今天容易看出，在现代数学的丰富内容中，基本上都是受微积分学影响或由微积分学直接发展成的结果．把这样的数学内容叫做**分析数学**．若允许浪漫，也可以说，分析数学是在具有代数结构的现代数学土壤中，由数学分析与实数理论共同培育出来的艳丽奇葩．那么，作为分析数学基础的代数学及实数论业已谈及，现着重就“微分学”与“积分学”概念及其发展作一正面认识.

*如今已能清晰看出，“分析数学”的发展态势可归为从“数”、“动”、“形”三个方面的迅速发展．“数”系指直接对函数作分析，这是本段的重点；“动”系指在函数中引入时间变量或直接对时间函数作分析，是以下三节的重点，其中典型的是“动力系统”论；“形”系指直接在空间形式（流形）上作分析，即“大范围分析”（现代几何学），待见第十章第三节.

2. 微分概念的发展

经典微分学（牛顿-莱布尼茨微分）对于刻画实值函数的局部结构特征，取得了极好的成功，并获得了“算术化”的工效，因此很快在函数论及其一切分支领

域中被移植、引申、推广和应用，以致今天不仅在涉及函数论的所有领域都建立了相应的微分概念，同时即使非函数论领域、非光滑对象上也有了微分学的席位.

比如数论，如果说代数数论还颇有函数味，那里有着诸如代数族上微分形式等尚属正常，那么其初等数论中多处用到微分积分工具（如素数理论、密率问题等）就不容易了.

又，如果说代数学上有 Abel 微分，lie 代数上有微分 Lie 代数，尚属自然，那么群论中的微分表示、Maurer-Cartan 微分形式等则属不容易了. 事实上，微分概念在诸如组合数学中、数值分析中、优化分析中都有它的用场，更不用说微分概念在几何学、微分方程论、复变函数论，特别是泛函理论中的广泛应用了.

例如变分、差分、绝对微分（共变微分、联络)、外微分（格拉斯曼微分)、次微分、微分包含、Frechet 微分、Gäleaux 微分、微分算子、拟微分算子、微分流形、微分拓扑、微分动力系统，以及 Schwartz 导数、Dini 导数、近似导数（关于集函数的）等，都是经典微分概念的直接引申、应用而创造出的新的微分概念情形，至于对经典微分学作平行移植、引用或直接套用的情形，那就更数不胜数了.

最后作为例示，给出几种重要的微分概念.

绝对微分：简单说即满足

（1） $\mathrm{D}(s_1+s_2)=\mathrm{D}s_1+\mathrm{D}s_2$；

（2） $\mathrm{D}(\varphi s)=\varphi\mathrm{D}s+\mathrm{D}\varphi\otimes s$

的 D 算子叫做绝对微分，其中 s 为纤维丛上截痕，$\otimes$表示张量积.

Frechet 微分：设 X,Y 是赋范线性空间，$U:X\to Y$, $\forall x\in X$，若 $\exists\mathrm{d}u(x)$，使得

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|U(x+h)-U(x)-\mathrm{d}u(x)h\|_y}{\|h\|_y}=0$$

则叫 u 在 x 处 F-可微，这里 h 为增量，$\|\cdot\|$ 表范数.

外微分：n 维流形 M 上 r 次外微分形式 ω 是光滑反称 r 阶协变张量场（概念见第四章第一节)，$\forall p\in M$，有微分形式

$$\omega_p=\frac{1}{r!}\sum_{j_1\cdots j_r=1}^{n}a_{j_1\cdots j_r}(p)\wedge(\mathrm{d}x^{j_1})_p\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x^{j_r})_p$$

则有 ω_p 的外微分：

$$(\mathrm{d}\omega)_p=\frac{1}{r!}\sum_{j_1\cdots j_r=1}^{n}(\mathrm{d}a_{j_1\cdots j_r})_p\wedge(\mathrm{d}x^{j_1})_p\wedge\cdots\wedge(\mathrm{d}x^{j_r})_p$$

3．积分概念的发展

积分与微分是互逆运算，因而凡是有微分概念之处，原则上都可以产生相应的积分概念．由此不难理解，积分概念及其引申、推广、应用也是十分广泛的，仍然可以说几乎遍布各个学科和分支领域．下面举出一些例子以说明之．

积分学中最为重要的“积分”概念有两个：第一个重要积分概念是 Riemann 积分（R-积分）．这是在求“曲边梯形面积”这一几何直观思想上建立起来的，也是大家最为熟悉的，包括 R-重积分、R-曲线积分、R-曲面积分和反常积分等．之所以叫Riemann积分而不叫牛顿－莱布尼茨积分，是因为(约200年后的)Riemann引入了 Riemann 和概念，并给出了积分概念严格的形式化表述．第二个重要积分概念是 Lebesgue 积分（L-积分）．这是在测度意义上建立起来的，系由 Riemann-Stieltjes 积分演变而来．后者（S-积分）具有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$ 形式，已非“面积”思想了．其应用也很广，比如，在概率论上 S-积分即用得很频繁．此外，要数傅氏分析中的积分了．诸如傅里叶积分、Dirichlet 积分、Poisson 积分等，还有复变函数论中的 Cauchy 积分、Villat 积分、留数积分，以及复域上代数函数的 Abel 积分、调和积分等．最后，不能不举到泛函分析中的抽象积分，诸如关于代数拓扑学的 Birkhoff 积分、盖尔范德-Pottis 积分、Bochner 积分等，以及基于序关系的 Dawiel-Stone 积分、Banach 积分、Donford 积分等．

同样的，以上只举到建立了新概念和新公式的例子，至于通常仅用到积分思想和积分方法的地方那就更数不胜数了．比如，积分几何学（群论领域）和种种概率积分以及奇异积分算子等都是对积分思想广泛的直接引用．

作为一例，现就 R-积分 L-积分概念作一比较（见表 9.1）．

表 9.1

$y=f(x)$: $[a,b]\to[A,B]$	积分形式：	f 满足的条件	定义中分割方式	定义中求和公式	收敛条件	评述
R-积分	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	f 为 $[a,b]$ 上有界函数	对 $[a,b]$ 分割	R-和：$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$	$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I$（有限值）$\lambda=\max_k(x_{k+1}-x_k)$	可测函数构成完备的度量空间，有界函数不构成完备度量空间，所以 L-积分更广泛．例如，狄利克雷函数（见第八章第二节）即 L-可积但 R-不可积．
L-积分	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$	f 为 $[a,b]$ 上可测函数[注1]	对 $[A,B]$ 分割	大和：$S=\sum_{k=0}^{n-1}y_{k+1}me_k$[注2] 小和：$s=\sum_{k=0}^{n-1}y_k me_k$	$0\leqslant S-s\leqslant\lambda(B-A)$ $\lambda=\max_k(y_{k+1}-y_k)$	

注：（1）已述及，一个集合的可测概念系推广度量学中测长度、体积的思想而来. 形式化表述为，对度量对象（几何集合，记为 L），定义一个包含 L 且皆可度量的外嵌套序列 $\{D_i\}$ 和一个被 L 包含且皆可度量的内嵌套序列 $\{d_i\}$，若 $\{D_i\},\{d_i\}$ 的度量序列皆有极限且极限值相同（记为 L^*），则说 L 可测，其测度值为 L^*，记为 $mL=L^*$. 那么定义在 E 上的可测函数 f 系指，集合 E 可测且 $\forall a\in\mathbf{R}$ 有子集 $E(f>a)$ 也可测.

（2）集合 $e_k\subset[a,b]$，有 $e_k=f^{-1}([y_k,y_{k+1}])$，这里区间 $[y_k,y_{k+1}]\subset[A,B]$，如图 9.1 所示中 e_k 为 $[y_k,y_{k+1}]$ 在原象上 $[a,b]$ 的相应子集（见图 9.1 中 x 上 5 个小段）之并，其中 me_k 即 $[y_k,y_{k+1}]$ 的原象集之测度值.

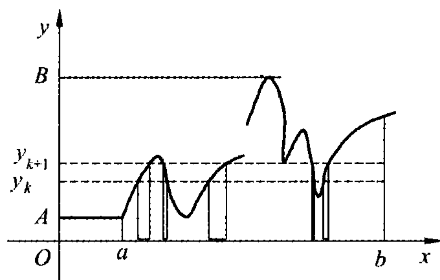


图 9.1

4. 函数理论的发展

随着 19 世纪晚期数学上产生的“爆炸”性发展，关于函数的研究在经典微积分学基础上也产生了爆炸性发展，很快形成了如下几大方面的理论领域.

（1）**实变函数论**，简称函数论或叫实函，主要研究测度论和可测函数、可积函数的特征以及函数逼近论（幂级数论）、函数构造论、特殊函数论等.

（2）**傅氏分析**，在复数表示的傅氏级数基础上研究函数，其理论领域主要是调和分析，还有其应用性基础理论如小波分析、快速傅氏积分（褶积变换）等.

（3）**复变函数**，主要因为复数的旋转性和周期性引起复变函数的“多叶”性和“Riemann 面”特征等，构成了它在微积分学上的研究特征及其变换后产生的特有的“保角性”、不变性分析等. 此外即 20 世纪 70 年代发展起来的多复变函数论，虽然复杂但正是研究“复杂性”的需要.

（4）**泛函分析**，已谈及，至今泛函分析的主体仍在“线性”阶段，也叫线性泛函，主要研究各种线性的函数空间特征和函数空间上的（线性）算子理论（进一步的参见十章第三节、五）. 此外便是非线性泛函. 虽说是非线性泛函，它的主要特征并不是线性泛函的直接推广，它的研究任务也与线性泛函迥异. 比如它主要研究**奇点理论**，诸如不动点理论、临界点理论、均衡点（平衡点）理论、极值理论乃至优化理论等都是它的基本领域.而表现它们特征的一个重要概念则是(进

一步提升成的）拓扑度或映象度、**奇点指数**等．

也已提到泛函概念（的确很“泛”）离我们是很近的，比如管理学、经济学乃至社会生活中广泛存在的度量、评价和政策实施、运作等一般都具有泛函实质．

（5）**函数方程解理论**，也属于函数理论．从大类讲“方程”只有两大类：一类是含数值解的方程，叫做**数值方程**，主要有代数方程、超越方程等；另一类是含函数解的方程，叫做**函数方程**，主要是各类微分方程、积分方程，也有一般函数方程，如 Schröder 方程 $h(f(x))=\mathrm{ch}(x)$ 等．关于函数方程，可分为解的“解析理论”(幂级数展式的解理论)、解的“迭代理论”(迭代收敛函数）和解的“几何理论”(定性理论）等，比如第八章中谈到的动力系统的周期解分析，即属解的几何理论．

（6）**拓扑学**．现代拓扑学，包括点集拓扑（又叫一般拓扑)、组合拓扑、代数拓扑和微分拓扑，且都已成为多学科（比如代数、泛函、几何、流形和微积分等）的交叉与综合了．那么其中的“函数”成分即表明了它的函数论特征．

此外还有诸如代数函数论、数论函数论、解析数论等也都是函数理论的用场．

最后看到，似乎我们从“分析学”出发又牵动了整个数学体系．然而过去也曾看到，从“代数学”上亦能串起整个数学，从“实数”出发也能串起整个数学，从“几何学”上、“集合论”上、“函数论”上……似乎都能串起整个数学．这是为什么？究其原因主要在于数学体系已构成一个复杂、稠密的网络，特别是，越走向现代的每个数学分支和方向，就越与其他学科分支和方向有着广泛、深层的相互参透，也就越能“牵其任一发而动其全身”．尽管从主体上说仍然可见，数学的基本结构还是那颗参天大“树”也罢（见拙著《数学纵横》)．

四、分析数学Ⅱ：数学推理方法的发展

1．公式推理

公式推理即用公式来推理，又叫公式推演、公式推导，这是数学中最为经典的方法，也是今天十分基本的、有效的“硬”方法．用公式来推理主要有**数值演算**、**等式推演**和**不等式推导**三种基本形式．这三种基本形式，也体现了“公式推理”的逐步发展过程，它们一个比一个范畴更广、更深刻．比如前者属于算术式的演算；次者则是关于变量的逻辑推演；特别是后者（不等式推导)，它与等式之间的差异更是空间维数上的差异，比如 n 维空间（n 个变量）上的不等式或不等式组所决定的有效区域仍是 n 维的，而 n 维空间上的等式（即其解空间）至少需要降低一维，一般的，i（$\leqslant n$）个这样的（无关）等式将降低 i 维．

不过如果数学完全被局限于公式的推理，这对数学的发展也是十分不利的，

因而还有下面的几种情况:

2. 概念推理

概念推理的原意即根据定义（包括公理）来推理. 这是希尔伯特发展起来的（简称希氏证明法），这时已不一定完全采用等式或不等式方式（可叫做“夹叙夹议”的、“半定量”的），推出的也不一定是公式性结论，而可以是一般的定理.

用定义来推理的进一步发展则是根据定理来推出定理，并且（如第二章第二节述及）我们在高等数学中也已得到这样的经验，常常能用定理来证明的结论（包括定理、引理、推论、性质、命题等），总能最终地用有关定义来证明. 但是也存在，凡能用定理来证明的结论，如果（退回去）从定义出发去证明，常常更难、更繁. 用定理来做证明的一个共通渠道是能把问题化归为某个定理的条件，从而援用相应定理作出结论，这种例子在微积分学中随处可见.

概念推理的另一类特征是，采用已有的原理和方法. 比如反证法和归纳法都是十分有效、应用十分广泛的使用方法. 此外诸如**箱箱原理**、**择一原理**（交集中的元素必属其中某一集）、**构造原理**之类的“原理”[①]在证明定理时也是常常可能用到的手段或工具.

特别是**构造性**证明（亦属概念推理），被认为是“硬”方法，容易使人信服. 比如哥德尔的两个不完全性定理即采用了构造性证明方法，这也是以 Brower 为首的实证主义学派推崇的方法. 遗憾的是数学中不是所有定理都能用此方法，所以说真要局限于用构造证明方法，也是会扼制数学发展的.

3. 合情推理

在第一章第一节已谈及，这是波利亚于其著作《数学中的合情推理》中提出来的，与其说是他提出来的，不如说是他总结出来的. 因为这已是数学研究中通常使用的一种方式，特别是数学家在思维创造、归纳猜想过程中，自觉不自觉地都在作“合情推理”，也叫做“似真推理”、“探索性演绎”、“归纳与演绎并用”等.

合情推理的基本格式是，首先给出一个猜想，然后通过种种方式找出理由去证实（或证明，至少要说明）增强或否定其猜想的合理性. 这样的过程叫做合情推理过程. 通常一个数学结论之得来，最初往往都要经过这一合情推理过程. 这就是波利亚的名言“数学是猜出来的”原理所在，也是人们普遍接受这一名言的原理所在.

合情推理也是模糊逻辑中一种推理方法. 在那里它被总结成归纳推理、拓广推理、类比推理、逆向推理、是否推理、常识推理等多种模式. 本质上说来，这

---

① “原理”这一概念十分广泛，在科研中常用，值得推敲.

些模式无非我们通常作合情推理时，自然采用的思维方式被有心人归纳、整理、总结而成.

总之，合情推理虽不是得到数学结论的最后手段，却也是数学发现的前期过程. 正如爱因斯坦说“提出问题比解决问题更重要”，创造与发现在数学研究中一样重要. 因此说合情推理修养特别在研究的初创阶段是大显神威的时候，我们应该对它产生意识，从而有意识地去培养和运用合情推理.

第二节　时间数学 *I*: *t* 变量数学与动力系统

上帝总让时间的帷幕徐徐拉开，而迫不及待的人类总想撩一撩，试图看得远一点，时间数学也许就是这样发生的.

“时间数学”一词系推广微分拓扑名家、数理经济学名家、菲尔兹奖得主 S.Smale 的书名《*The Mathematics of Time*》而来，该书仅谈到动力系统，我们这里需要来得更宽、更全面一点.

一、序：时间变量与时间函数

1. 时间是特殊变量

第四章已谈到，时间是随（牛顿）空间一起在“大爆炸”产生物质宇宙的同时即已产生的客观世界的运动属性或说一种物质表象；相对于物质宇宙的固有运动来，它是匀速的，同时是单向的，具体说是单增的，因而从代数意义讲它是个典型的 Abel 半群. 把 t 作为自变量讨论是拉普拉斯第一个从力学角度引入的.

在牛顿时-空中，时间的变域是正实轴（$t \in R_+$），但在相对论时－空中它是可以为负的，甚至成为复域上问题.

2. 时间函数的特征

从函数意义讲，以时间 t 为变量的函数（时间函数）是一种特殊的函数（注意不能说“特殊函数”，因为特殊函数是一类特有的函数名称，所以这里说成特殊“的”函数），它在时-空空间上的图像（仍为曲线）是单值的、无回转（无负向）的，且对应着物质运动. 但从实际运动讲，时间函数不会有其真正的间断、发散等奇异性，而运动轨迹总是连续的、有界的，即使最高频的脉冲也如此. 因此尽管一般函数可能有种种间断情形，然而作为时间函数至少不必关心它的间断情形，

最多只有变化率的陡缓问题.

19 世纪数学力学家柯娃列夫斯基卡娅还巧妙地引入虚时间 $\sqrt{-t}$，从而改进了欧拉和拉格朗日在理论力学上的一项重要成果（可惜她 40 岁时死于一场感冒）.

此外，一般来说时间函数的定义域（时间区间）是无限的，作有限情形的讨论常常是人为的处理.

特别地，通常人们考虑最多的问题（包括专业的和生活上的），多是以时间为自变量的，因此对“时间数学”的特征考察，特别作为“数理思维”是更具意义的.

3. 时间数学的共通使命

时间数学的共通使命就是，利用时间和时间函数的特性，以及时间函数的实际意义，从有限去表现无穷、从过去去探知未来. 总的说，时间数学的共通使命即在于**描述过去、预知未来**.

二、连续时间数学

1. 经典常微分方程到连续动力系统

常微分方程总是单自变量的，一般讨论的是其现代形式（H-形式，概念见第五节、二）:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(y,x) \tag{9.1}$$

这里 $y\in\mathbf{R}^n$，n 可为任一有界自然数，但只能 $x\in\mathbf{R}$（一维）. 此外，之所以说式 (9.1) 是一般形式，那是因为任一高阶线性常微分方程皆能化为一阶线性常微分方程组 (9.1) 的形式［例见第八章式 (8.4)］. 为方便叙述，下面仅就 $n=1$ 来讨论. 这时在式（9.1）中，$f(y,x)$ 的定义域可以是有限的，且其解曲线可能有回转. 例如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{9.2}$$

的解，皆知为 $y^2+x^2=c^2$（圆族），所以在这种情况下 x 不可能代表时间. 事实上，即使从形式看，其解函数也不满足“一、2”中时间函数性质.

可是对于式（9.1），总可以化为对时间 t 的（运动）系统，这是因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\triangleq\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=f(y,x)=\frac{f(y,x)}{1} \tag{9.3}$$

从而可表为

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,x) \\ \dot{x} = 1 \end{cases} \tag{9.4}$$

若式（9.3）中 $f(y,x)$ 为分式（设为 $\phi(y,x)/\varphi(y,x)$），则可化为一般形式

$$\begin{cases} \dot{y} = \phi(y,x) \\ \dot{x} = \varphi(y,x) \end{cases} \tag{9.5}$$

显然式（9.4）或式（9.5）都是对于时间的微分系统，把自变量为时间的微分方程叫做**连续动力系统**或叫**经典动力系统**（H-形式）.

对于连续动力系统，其解（时间的函数）即不会在时-空空间里回转循环了（但可以是周期函数）. 比如式（9.2）化为（9.5）形式，则成为

$$\begin{cases} \dot{y} = -x \\ \dot{x} = y \end{cases} \tag{9.6}$$

由此可见式（9.1）或（9.2）正是式（9.5）或式（9.6）在其相空间里的表示. 比如为要在时空空间里解出式（9.6），可引入参数变换 $x=\sin t$ ， $y=\cos t$ ，而直接得出解

$$(x,y) = (\sin t + c_1, \cos t + c_2)$$

特别地，把式 (9.3)～(9.5) 之类方程右端不显含自变量的动力系统，叫做**自治（动力）系统**，简称**自治系统**. 其特点是其解曲线仅由初始点（初始条件）决定，中途不会随 t 的改变而改变解的函数结构. 这点与系统式（9.1）和式（9.2）不同，式（9.1）和式（9.2）右端是显含自变量的，因而其解曲线不只取决于初始点，即使其自变量 x 改作时间 t 也不能叫它动力系统，而只能叫做“非自治（动力）系统”，或称“动态系统”.

通过以上讨论也看到了，“自治系统”与“非自治系统”之间或说动力系统与动态系统之间，在高一维空间的意义下是相通的，或说它们无本质差异. 比较起来显然讨论自治系统要容易一些，因此一般更多的是讨论自治系统，除非需要特别讨论具有时间性的控制项或强迫项问题.

如果式（9.1）中 $f(y,x)$ 对 x 没有“回转”现象，也可直接视 x 为“时间性”变量. 但为要改变这时式（9.1）的非自治性仍需要用式（9.3）的“升维”方法.

最后指出，通过常微分方程的时间意义讨论，也容易看到它与第八章谈到的，常微分方程中常常存在其“相空间”上周期解这一事实之间的内在关系. 同时看到，所谓“相空间”实则（时-空空间上的）动力系统沿自变量轴（t 轴）作正投影后的系统空间状态，又叫“状态空间”. 这时，在状态空间来考察动力系统的

“动”时，其公共的自变量（时间 t）则成了“隐变量”.

2．泛函微分方程

泛函微分方程又叫**微分差分方程**、**时滞微分方程**等，一般形如

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-\theta),t)\overset{\text{或}}{=\!=}f(x(t),x_t,t) \tag{9.7}$$

其中 $\theta\in(0,r)$，叫做**时滞**. 顾名思义，时滞是滞后于现时 t 的时间量，但根据问题需求，可推广到**超前时滞**、**无穷时滞**等，其方程形式也已发展出多种，其中最有名是中性方程（neutral diferentia l equations），形如：

$$\dot{x}(t)-c\dot{x}(t-\theta)=Ax(t)+Bx(t-\theta)+f(t) \tag{9.8}$$

其中 $x(t)$ 与 $x(t-\theta)$ 具有对称性.

比如当式（9.7）中 θ 取整数，即成为差分形式，这时方程成为既含微分，又含差分的格式，这是“微分差分方程”之得名处.

至于“泛函微分方程”之得名，皆因此类方程的解理论是建立在函数空间上的，比如式（9.7）的解 $\tilde{x}(t)$ 即是这样的函数：

当 $t\in[-r,0],\ \tilde{x}=\varphi(t)\in C([-r,0],X)$. C 是映 $[-r,0]$ 入 Banach 空间 X 的连续函数空间.

当 $t\in(0,\delta),\ \delta$ 适当大，$\tilde{x}$ 满足式（9.7）. 比如当式（9.7）为线性方程时，即有所谓“常数变易公式”表出的 $\tilde{x}(t),\ t\in(0,\delta)$.

由于泛函微分方程中时滞变量的引入，使得这类模型所反应的问题更为确切，所以其应用也很广，诸如经济学、生态学、病理学、电子学、气象学等都有应用. 不过显然它的求解要比解经典的常微分方程难，或说它的解理论不如经典的常微分方程成熟，这又反过来影响了它应用推广的速度和广度.

3．流形上的常微分方程

这是常微分方程的现代形式，又叫连续的微分动力系统，是从经典的平直空间 $\mathbf{R}^n$ 推广到一般 n 维空间的研究. 所谓“一般空间”即以平直空间作为其特例者，因而叫“弯空间”. 比如，环面（又叫双曲空间、轮胎面）、球面等. 特别地，在爱因斯坦理论和现代宇宙学中，弯空间找到了它的实际背景. 简单的，比如每一个大天体都有一个由其引力决定的外围弯空间，这无疑也增强了流形理论的生命力.

“流形”上常微分方程的解是建立在流形的“切丛”上的一类“截痕”所决定

的“流”.

总之，上述 2、3 段皆属于“抽象空间”上的微分方程. 前者属函数空间上的，而后者属弯空间（流形）上的. 但不管哪类常微分方程，本质上都是时间数学的，且属于连续的时间数学.

三、连续动力系统与混沌

1. 连续动力系统

一如第八章式（8.4）和本节“二、1”中讲到的，所谓“连续动力系统”，即导函数中不显含 t 的微分系统.“动力系统”论即起自连续动力系统研究，其发祥领域是天体力学中（牛顿的）所谓“多体问题”:

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = \partial u/\partial x_i \\ m_i\ddot{y}_i = \partial u/\partial y_i \\ m_i\ddot{z}_i = \partial u/\partial z_i \end{cases} \tag{9.9}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$； m_i 为第 i 天体的质量； (x_i, y_i, z_i) 是其空间位置；势函数 $u = g\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{m_i m_j}{r_{ij}}$； $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$，这是站在第 i 天体对 j 天体的万有引力下的动力系统；它是个（牛顿形式）三维二阶连续动力系统，可以化为 H-形式（兹免）. 对于 $n=2$ 容易求解，当年牛顿即已解决. 但 $n\geqslant 3$ 的解析解至今远未解决，不过为着实践需要作各种数值（特）解倒是可以的.

已知，由于连续动力系统无非取时间自变量的常微分方程，而常微分方程一般是不能给出解析解的，所以常微分方程的解理论主要是其“定性理论”. 因此连续动力系统解（轨道）的研究亦属（已成专业基础学科的）“定性理论”，包括奇点理论、稳定性理论、极限环论、混沌理论（见下段）等. 这里（再次）举出一个思想十分深刻而简单且有用的连续动力系统如下.

例 1 Logistic 曲线（L-曲线）系统，这是在第三章第六节讨论过的系统

$$\dot{x} = \alpha x(b - x) \tag{9.10}$$

这是个（可直接积分得解的）“可积系统”，b 是系统量 x 的增长极限，α 一般为正实数，意义自明. 这时若仅叙述为系统量 x 的增长速度与 x 和 $(b-x)$ 成正比或说其平均增长率 $\dot{x}/x$ 与 $(b-x)$ 成正比，似乎得到的启示都不大. 但若说成当 x 趋小和趋大（接近 b）时其增长率皆趋小，即可感知这样的增长系统是颇有意义的了. 的确，不仅其模型十分简单，直接积分即可求出解析解来，而且所含思想十分深

刻，应用十分广泛，特此再一次强调之.

2．混沌（Chaos）理论

可以说不管是在一维还是高维动力系统理论中，“混沌”概念和对混沌的探索都是它们占压倒优势的研究任务或研究兴趣．因此内容同样丰富，这里谈一点基本的东西.

（1）混沌现象自古有之，但人类从数学模型上发现它（与其说发现不如说是对其产生意识），还是起自 1963 年气象学家 Lorentz 的连续动力系统，即 Lorentz 方程

$$\begin{cases}\dot{x}=\sigma(y-x)\\ \dot{y}=\rho x-y-xz, \quad \sigma,\rho,\beta>0\\ \dot{z}=-\beta z+xy\end{cases} \tag{9.11}$$

是他经计算机求解（绘出解的图像）所产生的现象启发人们所产生的“混沌”概念.

从此人们恍然醒悟，原来到处都有混沌现象，包括经济社会、有机体中、化学过程……一句话，凡是符合普里高津涨落模型的开放系统都可能产生混沌．这就很普遍了.

特别地，数学家也为之一“醒”，过去在数学中所谓“发散”情形有很多种，常常被视为“病态”、“不合实际”或“不存在”而放弃了对它们的继续考察，经这一“混沌”概念提醒，人们站在一种新的“意识高度”去重新考虑过去的问题，立刻得到了新的深入．比如，对 Julia 集的认识、对施瓦兹导数（点点连续却点点不可导例）的认识、对 Peano 曲线（映射：一维单位线段充满 n 维立方体）的认识、对康托尔集的认识、对遍历的认识等，不过尚不能说对混沌的研究已很深入、成熟，相反，连混沌概念也似在“混沌”中.

（2）目前，即使对混沌概念作出具体定义，也还远未统一．特别要能形成“公理化定义”以便据此开展进一步的混沌理论研究，更难统一．现有定义各式各样，现有理论也是在各自定义下进行的．比如常见的（包括连续动力系统和离散动力系统的）定义有：

• 混沌即混乱.

• 有限区域内的无穷轨线，当轨线没有“极限集”时产生混沌.

• 系统的正熵 $S_+>0$ 产生混沌.

• 周期点集具有稠密性的动力系统产生混沌.

• 同宿轨自我相交产生混沌（简单说，同宿轨是自奇点发出又回到该奇点的轨道，系 1890 年庞加莱提出，1935 年得到继续研究）.

• 迭代轨道具有任意周期的（离散）动力系统产生混沌.

• 任意轨道间既可任意逼近，又可任意分离的动力系统是混沌的.

• 动态系统所受干扰量级与系统固有量级可比拟时，产生混沌.

• 有混沌机制的系统难于做长期观测，反之亦然.

• 拓扑熵 $\text{ent}(\varphi) \gg 0$ ，产生混沌. 这里

$$\text{ent}(\varphi) = \sup_{\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log H(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \varphi^{-(n-1)}(\alpha))$$

简单说其中 φ 是一种连续函数，α 为一种开覆盖，$H(\alpha)$ 表示 α 的任意有限子覆盖的基数（“盖子”数）的下确界.

• 迭代轨道具有萨可夫斯基序列上所有周期（或即第一周期为 3）时产生混沌.

• 特别地，“周期 3 意味着混沌”. 这就是有名的:

Li-yorke 定理 对于 $I=[a,b]$ 上的离散动力系统 (φ,I) ，设 $\varphi \in C^0(I,I)$ ，若 $\exists x \in I \ni \varphi^3(x) < x < \varphi(x) < \varphi^2(x)$ ，则

① (φ,I) 存在具有一切周期的周期轨;

② φ 在 $S = I \setminus P(\varphi)$ 上是混沌的.

证明略.

• （Devang 定义（参见《混沌动力学》, 卢侃等））. X 为拓扑空间，$\varphi: X \to X$ ，若下述 3 条满足，则 (φ,X) 是混沌的.

① φ 对初始条件有“敏感依赖性”;

② φ 是“拓扑传递”的;

③ $P(\varphi)$ 在 X 中稠密.

作为定量研究所依据的定义，自然应该是公理化的，因此以最后几个定义为佳，特别是 Li-yorke 定理中给出的混沌判定（亦作为混沌定义），运用最广.

(3) 尽管混沌概念问世已逾 30 年，而且在各个方面引起的混沌研究热一直未衰，这方面的成果也很丰富，但也不能不承认在理论和应用上的进展并不理想，特别是在数学上的进展更为缓慢.

关于混沌的研究，目前主要是从计算机的数值模拟研究、实验观察分析（物理的）和实际观察思辨（社会的）以及理论的（数学的）研究等几个方面在进行，目前看来以计算机研究成果为多. 理论研究上除了一维动力系统在前些年有一些漂亮成果外，近些年来少有突破性成果.

关于混沌运动的一般规律是否只是已经作出的刻画，尚须回答. 此外，混沌

的机制和机理探讨也需要突破.

3. 多动力系统

既有的动力系统理论基本上都是“单一动力源”及“点”式的系统. 但显然，实际的存在不止如此，只是更为复杂些罢了. 因此说往后总是需要向这些方面进取的. 对于非“点”式系统，叫做“形态”动力系统，放在下节讨论. 本段谈谈“非单一动力源”的动力系统概念（尚待进一步做工作）.

非单一动力源的动力系统提出于 1991 年的《工程数学学报》第一期，现分三种情形来提出:

一种叫做“多动力系统”,即同时有多个力作用在同一场(相空间)中的情形.比如，同一市场中同类商品有多个品牌竞争，因此这里的每个消费者都同时受到多个商品广告的作用. 这时市场上的运行规律是值得研究的.

另一种叫做“多层动力系统”，即相空间中每个“元素”在不同相位上受到不同的作用力情形. 比如，社会上每个人既受到食品商的作用，又受到股票信息的作用，还受到社会风尚的影响等. 这是来自多个层次（或说相位）的作用，值得考察其运行规律.

再一种叫做“时序多动力系统”，即系统中同一元素随着时间的推移而受到不同作用的情形. 诸如适时控制系统或（本质上说）动态系统等皆属该类情形.

四、高维动力系统轨道的“一维”特征及其意义

首先，推广前面知识可知，对应于系统 $y=F(X)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的动力系统为

$$x_i = f_i(X)\ ,\quad i=1,2,\cdots,n$$

这是个（n 维系统空间乘 1 维时间空间的）$n+1$ 维时-空空间问题，其解的通有形式为 $x_i=x_i(t)$，这在 $n+1$ 维时-空中皆 $n-1$ 维“超曲面”. 特别地，所有这样的超曲面在此 $n+1$ 维空间中正好相交于同一条“曲线”（这是受 $y=F(X)$ 约束的结果. 注意到即使直接给出动力系统 $x_i=x_i(X)$，其背后仍有 $y=F(X)$ 这一实质），那么，在 $n+1$ 维空间中的这一条曲线，就是系统整体的时序演变（或叫运动）轨道. 轨道投影到“相空间”叫做“轨线”.

亦即，任一动力系统的“轨道”（或轨线）都是其相应时-空空间（或相空间）中一条条曲线. 这一事实给了我们很大启示，带来很大好处（意义）.

“启示”是，任一 n 元（n 维）系统在其 n 维空间来说即“成为”一个“几何点”（或叫“质点”），它在该空间内的运动轨道（或轨线）自然是一条条（一维的）曲线.

“意义”在于帮助了我们的思维。实际上我们在思考事物的时序演变过程时，如果脑子里总装着系统整体，必然显得很杂乱，当知道它实际上就是个高维欧氏空间中一“点”的运动规律时（诙谐地说“当我们站在相应高维空间去看时”），则给我们带来一种清新感．这时，我们在《高等数学》中一元函数学得的曲线几何特征（也是第三章第三节谈到的），诸如单增、单降、凹、凸、拐点、极值等，即可用起来了．因此说对于高维空间的系统，这时仍然具有直观而熟悉的一维曲线“数理思维”特征．所以对曲线几何特征的思考也是“数理思维”一个重要方面．

第三节　时间数学Ⅱ：迭代论与离散动力系统

本节和下节讨论的离散时间数学，在现代数学中属于颇为热门的方面．其根本是“迭代”机制（分做形态迭代与点式迭代），现依次述出．

一、时序数据认识

对于数据组 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$，有两种类型：一类是无序的，即其元素可以没有脚标，即使有时标上了脚标也只是为了区别元素．这是“数据数学”（上一节）谈到过的，它典型地属于统计学问题．另一类是有序的，这时的元素必有脚标，或说其元素脚标有更深层意义．

数据的“无序”和“有序”两种类型间具有质的差异．后者相当于比前者多了一个因素，那就是后者的元素同时又是其脚标的函数．本段即来讨论后者，即着重讨论数据在“时序”意义下的信息关系．

1．单一数据的信息功能

已知，既然是“数据”就不在乎其数值，而在乎其内含的“信息”．首先看看数据组中单一数据，它具备了两个信息特征．

一个是该“数据”的本质，那就是作为“数据”，它的得来本质上是对客观对象（系统空间 X）的一种“泛函”映射（记为 $F(X)$）．比如，股市上任一时刻所显示的“指数”，本质上就是不知有多少股民心理空间的总体映射，再经多道计量才得出的一个“数”．虽然没有给出它的表达式，但总容易理解到，它是经多种复杂函数的再函数所形成的一种最终函数（或叫映射）．这正是符合泛函定义的（见第三章第一节、二）．

另一个是作为单个“数据”(而不是数量)在其数据组中的功能. 这时候体现为该数据在“序”位上与其前后数据间的“关系”, 也是一种函数关系(如下).

2. 两相邻数据间关系

(1) 序: 这里有个基本“原理”(理解之后可作为公理来用), 那就是“时序性离散数据的相邻数据间必存在一定的函数关系”, 叫做后者对前者的“记忆”. 甚至这种“记忆”可以是多阶的(多级相邻的), 只不过常常是愈远者记忆愈弱罢了.

其实即使肉眼看离散图像, 也有个 32 分之 1 秒的“记忆”期呢.

显然, 相邻数据间间距(步长)愈短,“记忆性”愈强.

(2) 模型: 据此, 设有 a_i, $a_{i+1} \in \{a_i\}_{i=1}^n$, 则可有(一阶记忆的)关系 f:

$$a_{i+1} = f(a_i) + \eta_i \tag{9.12}$$

其中满足 $a_1 = X$ (恒同映射), 第二项是第 i 步到第 $i+1$ 步过程中受到的外来因素“影响”, 可以是人为控制或干扰等. 注意到这里“干扰”可分为随机干扰和非随机干扰两类. 相对说来前者往往频率高且时正时负(叫做随机摆动), 因而容易相互抵消; 后者常常具有持续性、单向性, 不容易自我抵消. 对于不利的非随机干扰需要用人为控制去对付, 比如环境污染.

当 i 依次取自然数时, 把式(9.12)这样的关系叫做“迭代关系”, 把式(9.12)叫做“迭代式”.

(3) 对于迭代式(9.12)可从三个方面去讨论:

① 当 η_i 是随机干扰量时, 式(9.12)属于随机迭代系统, 归于随机微分方程论中离散问题. 当其为非随机干扰量时归于控制系统论(如下).

② 当 η_i 为控制量时, 式(9.12)属于控制型动力系统, 这在“控制论”中已是十分基本(因而较为成熟)的问题.

③ 当 $\eta_i = 0$ 时, 属于一般迭代式(动力系统)研究. 这时若式(9.12)中每次映射方式都一样(皆记为 f), 则有

$$a_{i+1} = f(a_i) = f(f(a_{i-1})) = f(\cdots f(X)\cdots) \triangleq f^i(X) \tag{9.13}$$

(4) $f(a_i)$ 的简易确定: 实践中当知道时序数据 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 时, 可求出环比序列

$$\{a_{i+1}/a_i\}_{i=1}^n \triangleq \{k_i\}_{i=1}^{n-1}$$

则若 k_i 间“比较”接近(根据问题容许度来定(还可进一步研究)), 可取 $k = \sum k_i/(n-1)$, 从而有线性关系式

$$a_{i+1} = ka_i$$

否则可进一步求

$$\left\{a_{i+1}/a_i^2\right\}_{i=1}^{n-1}=\{r_i\}_{i=1}^{n-1}$$

若这时 r_i 间“比较”接近，则取 $r=\sum r_i/(n-1)$ 得二阶关系式

$$a_{i+1}=ra_i^2$$

等.

3．时序分析

“时序分析”是 1943 年由控制论之父维纳创立的．从时间方面看，它典型地属于离散时间数学，但从学科的从属性看，它却属于随机数学，具体来说应属于随机过程、统计学、控制论和差分方程、动力系统等的交叉学科，所以仅在这里提出来，具体叙述则放到第四节最后.

二、迭代论Ⅰ：系统形态序列

若站在系统（对象）整体角度去看它的时序演变序列，可看到系统是在其时-空空间中依时间轴上（瞬刻序列）的一个“横截痕”（犹如黄瓜横切片的）序列．这样的每个“横截痕”叫做系统在此刻的“瞬刻图像”，又叫做此刻的“系统形态”．把这样的“横截痕”序列叫做系统的“形态序列”.

由时序性的记忆性可知，每一“形态”总含有前一“形态”（甚至前多个形态、多阶记忆）的信息．为简便，在不考虑外来因素（上述 $\eta_i=0$）且取一阶记忆时可说：每一“形态”总是其前一“形态”的迭代，即其前一形态的函数．因此这时的形态序列就是“迭代序列”，也叫**形态迭代序列**.

花蕾经十小时开放，若每小时照一张相（一个横截痕、形态），则此过程成为 $n=10$ 的“形态序列”了．原子弹爆炸过程中若每分每秒照一张像，则它也是个离散的“形态序列”．推想之，当初达尔文脑子里也充分显示出生物种群进化的“形态序列”呐，乃至任何物种一代代的传承，都是些“形态序列”……

进一步要问，在这样的序列中，其迭代（函数）关系的机制（即内在动因）是什么？简单说来就是“动力系统的运行轨道是由其初始条件唯一决定的”这一原理，或说是因为一旦有了统一的迭代模型，其依次的函数关系“机制”就内在地涵于其中了（这里未考虑迭代过程中受到的非随机性影响）.

下面继续认识“形态序列”．记系统为 S，其形态序列为 $\{S_i\}$，则它也是个形态的“迭代”序列．形式上应有 $S_i=F(S_{i-1})$，乃至有

$$S_i = F(S_{i-1}) = \cdots = F^{i-1}(S) \tag{9.14}$$

注意到式（9.14）与式（9.13）差异是很大的．因为式（9.13）中自变量a_i是（代表的自变）量，因而式中函数f可以落实为具体的函数式，但式（9.14）中F不可能落实成具体函数式．原因是这里的S或S_i不是（自变）“量”而是图形、是空间、是系统在瞬刻的形态，所以其符号表示只能到此为止．比如第八章第六节例中序列$\{F_i\}$即如此．又如Peano映射（十一章第二节、六）、种种分形序列（分形见第二章第二节、一）等都是形态序列，它们的迭代映射皆非具体函数，而是用白话和条例界定出来的．

数学上至今对“形态序列”的描述有两种类型．

（1）它仅表示到上述序列$\{S_i\}$或式（9.14）的程度，进一步的则是直接对其中映射F_i作定性讨论．比如，除上述Peano映射、分形序列等外还可（根据对问题的理解）假设迭代函数满足连续或光滑（即可导）、增降凹凸之类条件，以讨论其形态序列（或轨道族）的定性特征，如均衡性、周期性、复杂性等．

（2）把系统S（设为n维）看作n元函数（已知，在相应$n+1$维时-空坐标系下即“成为”其定义域中一个通常“点”）来建立具体的离散模型作分析．这时它能更为深刻地对这样的“点”刻画或描述出它的“序列”轨道来．那么，由于这种点是其“变域”中通常点，当其在同一时刻取遍S的“变域”时，即能得到系统S在此刻的“横截痕”或“形态”了．

当然，也可以将形态序列$\{S_i\}$（作泛函式）映射为“数列”，然后用（2）中方法建模分析．不过这时问题已被提升（抽象）了一个层次，比如取系统S的功能（系统的一种泛函，记为w）增长序列$\{w_i\}$来讨论，就是提升一个层次了．

显然，两种类型各有偏重、各有特色，如今（根据课题特征）两者都是“离散动力系统”（续见四）的研究方式．

三、迭代论Ⅱ：时序离散模型的建立

在实践中所用的技术性手段常常具有“离散”性，这时即使对连续对象或连续模型也需要作离散化处理．比如用数值积分方法（近似）求解微分方程时，即需要化为离散形式．特别在（具有离散本质的）计算机科学时代，对离散化手段与离散形式的构建认识，更是十分重要的．

1．连续动力系统的差分化

在已知连续动力系统（对时间的常微分方程）情况下，可以直接对其“差分

化”使之成为离散模型．为方便计，现仅对一阶方程

$$\dot{x} = f(x) \tag{9.15}$$

来叙述．

为将式（9.15）离散化，首先需要将其连续的时间 $t \in T$ 离散化，并简单地取单位步长，记为 $h=1$，再记 $T \approx \{n\} \subset \mathbf{Z}$（整数），则有

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)-n} = x_{n+1} - x_n = f(x_n)$$

从而有

$$x_{n+1} = f(x_n) + x_n \triangleq F(x_n),\ n \in \mathbf{Z} \tag{9.16}$$

式（9.16）叫做式（9.15）的差分格式，也叫差分方程，它是离散动力系统的初等形式．

特别地，若记 x_0 为初始点，则

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n), \\ x_{n=0} = x_0. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{9.17}$$

表示式（9.15）过点 x_0 的一条（近似）轨线．

这里再作两点介绍：

（1）由连续动力系统（9.15）离散化，成为离散动力系统（9.16）型，总是容易的，在同一空间内即可完成．反之，若由式（9.16）或下面讲到的一般的离散动力系统化为连续动力系统则是有条件的，甚至较难．一般说来需要提升到高一维空间去讨论，有时还要作一定的诸如“嵌入”、“扭扩”之类的技巧处理方可完成．

值得称奇的是，这一事实在现实生活中也有很好的对应．比如，当我们根据某事物在物质空间 X 内的有限（离散）观察信息去理解它的原（连续）过程时，即属这类从离散系统到连续系统的问题．比如破案分析、科学实验分析、天文观测分析等，都是在完全空间 (X, X^*) 上完成的．因此说是在（相对于 X 的）高维空间进行的，而分析过程中的困难，广义地说正好对应于“嵌入”、“扭扩”之类处理方式．

（2）对于（9.16）型差分格式的研究有两条途径：一个是计算方法上对连续动力系统（如式（9.15））作数值积分．这时主要体现为提高精确性和计算速度、收敛速度等．比如，这时对其离散化的方式和步长、步伐的考究都是十分精细、

深刻，它属于（本章第一节、一）谈到的数值数学．另一个是对式（9.16）进一步抽象成一般的离散动力系统，以作更为广泛的理论研究．如今离散动力系统已成为动力系统学科的主流，因此可直接把它叫做“动力系统”．

2．根据数据模拟离散系统

在预知时序“数据”而不是（9.15）型“方程”的情况下，可以直接根据数据来建立离散动力系统．一般方法是用统计方法中回归分析等模拟建模（见第四节）．此外，是根据具体问题特征作多学科交叉建模，如“时序分析”等即如此．

最后，显然还有直接将系统的连续过程离散化而成“迭代序列”的情形，不过这在段“二”中谈过了，这里点到为止．

四、迭代论Ⅲ：离散动力系统

已说过，如今所说“动力系统”就是离散动力系统，又叫一般动力系统[①]，主要特征是其“迭代性”．也就是说，其轨道（解）是以一个序列的迭代点表出的．对这样的轨道和轨道族作定性分析，产生了远大于连续动力系统的灿烂境地，这里只能作一略览（更多的可参见拙著《系统学原理》第二版十一章）．

一般动力系统定义如下：

定义 9.1 设 X 是拓扑空间，$G(Z)$ 是 Z 上拓扑加群，且设映射 $\varphi: X\times G\to X$ 是 G 上加群，满足：

（1） $\varphi^0(x)=x, x\in X$；

（2） $\varphi^{t+s}(x)=\varphi^t(\varphi^s(x)), x\in X, s,t\in G,$ （9.18）

则称式（9.18）是 X 上一个动力系统，记为 (φ,X)，亦叫离散动力系统，这时 X 叫做相空间，φ^t 为 t 次迭代映射.[②]

当 $G(Z)$ 为半加群时，(φ,X) 叫做半动力系统．从时间变量的特征来说半动力系统才是合符实际的，但一般动力系统（有回复“运动”）在理论研究上也是不可少的．

当 $\varphi\in C^0(X)$ 时，称式（9.18）为**拓扑动力系统**．

当 $\varphi\in C^r(X)$，$r\geqslant 1$时，称式（9.18）为**微分动力系统**．

若 $G=G(R)$，且 φ 是 X 的同胚映射，则满足式（9.18）的 φ 是 G 上的 Lie 群，

---

① “动力系统”一词不能与“系统动力学”相混，后者属于“动力系统”的应用方法，提出于20世纪50年代，具有立足计算机的建模特色．

② 请对比第五章第四节、三中同一定义，它们是等价的．

这时（9.18）叫做**连续动力系统**，φ 称为 X 上的“流”，并将 $\varphi^t(x)$ 记做 $\varphi(t,x)$．

又设 $X=\{x:x=(\cdots x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\cdots),x_i\in\{0,1,\cdots,k\}\}$，显然 X 是一个拓扑空间．再设 $\varphi=\sigma:X\to X$，σ 为 X 的移位自同构，则 $(\varphi,X)=(\sigma,X)$ 叫做**符号动力系统**．

现仅就离散动力系统谈谈它的基本情况．

关于（离散）动力系统，其理论分为**一维**动力系统和**高维**动力系统两大分支．

（1）一维动力系统．根据**线段**和**圆周**这两个独立的拓扑类型的不同，一维动力系统又分为“线段上动力系统”与“圆周上动力系统”两个分支．其中以线段上的动力系统研究最为活跃，其目标是力图完全地认识一维空间的动力系统规律，因此内容很丰富．现着重以如下重要的**线段上动力系统**

$$x_n=\varphi(x_{n-1})\triangleq rx_n(\beta-x_n)\,,\quad x_n\in X=[a,b] \tag{9.19}$$

为背景，就该类动力系统的几个特征性问题作一罗列．

① 单峰函数与迭代图．因若式（9.19）中的 φ 为线性函数，迭代是平凡的，而若 φ 的非线性性太强（图像为多峰的），则迭代中变化太复杂，所以一般研究中，只取 $\varphi(x)$ 为单峰的或叫帐篷的，亦即仅以二次函数作为起始迭代．原因是，随着迭代的进展，各种复杂情形都是能够获得的．

如图 9.2 所示，φ 为一种单峰函数，作为动力系统（9.19），这里 $X=[a,b]$，为了便于表述，将其纳入二维空间 $[a,b]^2$ 进行讨论．如图中 φ^1 为 $[a,b]$ 的一次迭代图像，它与图上对角线的交点为不动点，通过对角线容易作出 φ^2 图像（图中虚线）且为双峰函数，在 (a,b) 上有三个不动点．φ^2 图像的描点方式，如图 9.2 所示，自 $\forall x\in[a,b]$，沿图中描出的途径即可得到 $\varphi^2(x)$ 点．

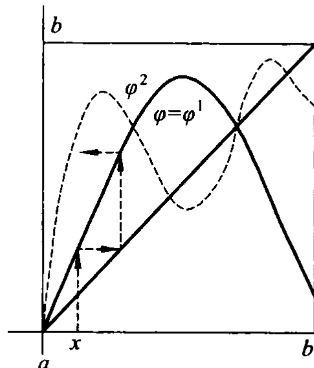


图 9.2

② 不变集．不变集是动力系统中一个最重要的概念．一维动力系统同样有多种不变集，比如不动点集 $F(\varphi)$、周期点集 $P(\varphi)$、回复点集 $R(\varphi)$、非游荡点集 $\Omega(\varphi)$、终于周期点集 $EP(\varphi)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi^n(P(\varphi))$、极限集 $\omega(\varphi)$（无穷轨道趋向的极限）等，它们的关系如第八章式（8.9），同时有（$\omega(\varphi)$ 除外）：

$$F(\varphi)\subset P(\varphi)\subset R(\varphi)\subset \Omega(\varphi)\subset EP(\varphi) \tag{9.20}$$

③ 萨可夫斯基（A.N.Sarkovskii）序列．1964 年，苏联年轻数学家萨氏提出

了一个自然数集的萨-序列：

$$3\rhd 5\rhd 7\rhd\cdots\rhd 2n+1\rhd 2n+3\rhd\cdots\rhd 2\times 3\rhd 2\times 5\rhd 2\times 7\rhd\cdots\rhd 2\times(2n+1)\rhd 2\times(2n+3)$$
$$\rhd\cdots\rhd 2^2\times 3\rhd 2^2\times 5\rhd\cdots\rhd 2^2\times(2n+1)\rhd 2^2\times(2n+3)\rhd\cdots\rhd 2^m\times 3\rhd 2^m\times 5\rhd\cdots$$
$$\rhd 2^m\times(2n+1)\rhd 2^m\times(2n+3)\rhd\cdots\rhd 2^l\rhd 2^{l-1}\rhd\cdots\rhd 2^3\rhd 2^2\rhd 2\rhd 1 \tag{9.21}$$

从而有：

定理 9.1（A.N.Sarkovskii）　若 $\varphi(x)\in C^0([a,b],[a,b])$（$[a,b]$ 上连续自映射），设 φ 有 m 周期点，则在式（9.21）中满足

$$m\rhd n\rhd\cdots\rhd k\cdots$$

的一切 n,k 都是 φ 的周期，即有 n-周期点、k-周期点等（证明略）.

④ 费根堡蒙（M. J. Feigenbaum）现象．1970 年代美物理学家费氏对单峰函数

$$\varphi_\mu(x)=1-\mu x^2$$

进行迭代研究时发现，取 $\mu_n\in\{\mu_n\}$ 自 0 到 2 的过程中有若干“突变”点，且 φ_{μ_n} 依秩产生超稳定周期（若 $(\varphi_\mu^i(x))'_{x_0}=0$，则 x_0 为 i-超稳定周期）的 2-周期点、2^2-周期点…… 2^n-周期点、$2^k p$（$p>1$,奇）周期点……3-周期点等，同时发现

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu_\infty<2$$

$$\lim_{n\to\infty}(\mu_\infty-\mu_n)^{\frac{1}{n}}=\delta^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_n-\mu_{n-1}}$$

其中 $\delta=4.669\,2\cdots$，δ 是对任何 φ 都适合的普适常数，正如数学中的 π, e 和物理学中三大普适常数（万有引力常数 g，相对论常数 c（光速）和量子力学中普朗克常数 h 等）一样.

关于费氏现象的研究有丰富的内容，它对动力系统，特别是一维动力系统的研究促进很大.

（2）高维动力系统．当系统（9.18）中 $X\subset\mathbf{R}^n$，$n>1$ 时，该动力系统叫做高维动力系统．对于高维动力系统，不可能指望全面地认识它，即使在一维情形也还没有做到这点．因此对于它，目前还只能就一些典型的问题、模型或典型的应用对象作为任务去研究．比如，在动力系统内部有奇异吸引子、分枝理论、Henon 映射、Thom 双曲映射、Smale 马蹄映射等著名问题，推动着动力系统理论的发展．在应用中则可说几乎一切有动态过程的问题或能化为动态过程的问题都有动

力系统理论的用场，因此其实例是不胜枚举的．

（3）关于动力系统中的**混沌**（Chaos）理论．

前节已谈过连续动力系统中混沌概念．关于（离散）"动力系统"中混沌（Chaos）理论更为丰富．比如，已证明一阶、二阶连续动力系统皆没有混沌，然而就连一阶非线性（即右端函数非线性）动力系统也可有混沌，足见动力系统中混沌的丰富性了．现仍以系统（9.19）为例来说明．

已看到系统（9.19）是离散 Logistic 动力系统，它是既简单又十分有效的一类动力系统，因此是动力系统理论中非常基本的一个模型．然而我们又看到，它也是对应着连续 Logistic 动力系统（如式（9.10））的，因而其**思想**也是一种很好的**世界观、方法论**．

关于式（9.19）的迭代及其特征见图 9.2 及相应说明．特别地，已经表明，比如当式（9.19）中取 $r=4, \beta=1$ 时（相对于式（9.10）中取 $\alpha=4, b=\frac{3}{4}$），系统即处于"混沌"状态．

自然会问，既然系统（9.19）与式（9.10）皆属 Logistic 型系统，仅仅是个离散型与连续型的差异，那么一个系统存在混沌而另一系统却不存在混沌，这是为什么？

这里仅给出简单解释（更细的可参见《系统学原理》）：

① 一个原理．由于过一有序离散点列（简称"点列"）可以引无穷多条连续曲线，诸如折线和各级光滑曲线等等．因此若要过此"点列"作出某个确定的或符合某些条件的曲线那就不容易了．

这点表明了一个实质，即一个"点列"所对应的空间维数必高于过此"点列"的一条连续曲线的维数．比如，平面上任两不同点间可以有函数空间（至少无穷维），较之这两点的点集（0 维）维数或其任一具体连线的（1 维）维数来，那是本质的差异．

② 本质解释．连续动力系统（9.10）和离散动力系统（9.19）的轨道族中都有一个以常轨 $x=b$（见图 3.4⑦）为轴的所谓"奇异吸引子"带．这对于连续动力系统来说仅是个"压缩"带而已，但这点对于离散动力系统则非同小可了．因为这个"压缩"带内的特点是，轨道族进入这一带域后轨道之间将越来越靠的紧、密度将越来越大，由于离散动力系统中的迭代运算总有误差，那么在"压缩"带内这一误差将被大大"放大"，从而轨道表现得十分敏感，使得离散轨道在"吸引子 $x=b$"附近将会跳动得很厉害．特别在适当参数下可能产生一种周期性的上下跳动，且最终将以不同的周期收敛到直线 $x=b$ 上成为 2^n 种形式的不动点，混沌就这样产生了．

第四节　时间数学Ⅲ：随机数学

概率论与统计学是大家学过的，本节仅就一些有关知识作一简述，诸如概率的空间特征、泛函特征、时间特征及其预测实质、平均实质等．

一、随机数学小议

关于随机数学的起源，可推至15世纪末卡丹与塔塔利亚合著的《博弈者入门》一书，稍近的也可说起自1651年帕斯卡（B.Pascal）的同乡人默勒向他提出的掷骰子问题，后经帕氏与费马的书信讨论得到了如今概率论的前提知识—— 排列、组合及二项式的系数规律（帕斯卡三角形）等．而后，J·伯努利还发现了**大数定律**；到1812年拉普拉斯提出了先验概率论，并总结成书；后又有Von Mises提出经验概率论；1920年为庞加莱、希尔伯特所振兴并成为学科．但概率论长期未被数学界正式接纳，原因是说它与数学哪一个基础学科都挂不上钩，说它不属于数学．直至1935年才为柯尔莫哥洛夫证明它属于测度论，为之找到了逻辑基础，这时概率论才作为测度概率论正式成为数学中的一员，也因此而得到了猛烈发展的生机．20世纪50年代即形成了概率论基础教材，60年代又从中独立出统计学分支学科．如今概率统计学及其应用学科分支已构成一大学科体系，统称为**随机数学**，也包括博弈论、排队论、随机微分方程、时序分序等．如今，随机数学已成为应用数学和工程技术应用界不可或缺的基础知识和主要的定量分析手段．

本质上说，所谓随机问题无非是“高维的确定性问题作低维处理”的一种方式罢了．比如每次掷骰子的结果，显然应该是其初始条件（向量）与过程中很多细微因素共同形成的，皆因现时无力探知、掌握和控制它们，这才将其（很多因素）统一地以一个随机因素ξ来表示．推想之，确定数学建模中也丢掉了不少“弱”因素．从随机数学意义讲，本应在确定模型后加上一个随机项ξ以表征一切丢掉了的多维因素才是．换句话说，从实践意义讲，确定数学模型也应该是随机的．在这里，随机数学与确定数学仅仅是处理方法上的差别而已．

最后，笔者愿借此提出，作为非数学专业公共的应用数学基础知识，除“高等数学”外（在“高等数学”基础上），最重要的应该是“概率统计学”和“动力系统理论基础”这样两门各具特色但同等重要的学科．比如，两者建模的原理就十分不同，特别是后者对于培养我们观察分析问题的能力，帮助我们理解客观事物，形成思维习惯都是十分有用的．

当然，随机数学与动力系统理论也有共通之处，那就是都具有时间性，只是

随机数学的时间性来的不那么直接罢了.

二、概率概念中的时间性

1. 概率论具有预测实质

比如说掷一次硬币，问是国徽向上还是面值（文字）向上？显然这是个预测性问题. 不过一般按确定性数学得到的预测回答应该是“确定”的，然而我们这里只能给出不确定的预测答案（概率值），即说有 0.5 的可能是国徽向上. 由于待事件发生后则不是 1 就是 0，所以这个预测值总是有误差，叫做“不确定性”. 又如，当我们说一个一般的社会都有 6%左右的残疾人时，这里的概率似乎具有“结构”意义，但若问在社会中随机抽取 1 000 人将有多少残疾人？这种情况下来说概率值，即成为具有“预测”意义的了.

事实上，凡是 0,1 性（不发生与发生）事件，事先给出其发生的概率值都是一种预测，只是通常不这么说罢了. 通常（生活中）说“预测”是指确定性的，亦即测出的结果本身是 0 或 1，但实际经验后却不一定，误差要么是 100%（错），要么是 0（对），而概率论预测虽总有误差，但都小于 100%，所以说两种预测具有实质性差异.

总之，容易发现凡是求概率的问题都属于待发生的 0,1 问题，或叫 0,1 事件. 因此说“概率”概念中具有预测实质，它能科学地给出事件发生的可能性大小.

那么，一方面说概率问题是随机性问题；另一方面说我们能作预测的只能是时间意义下的稳定（非随机）规律，怎么解释？我们有：

2. 概率值中已消除了随机干扰

首先我们知道，概率值是一种“期望值”，而期望值是一种“均值”，实则极限意义下（无穷次实验）的均值. 现在看看，作为一个事件（比如掷硬币），它受到的随机干扰虽然就其个别实验来讲，不具有稳定规律，但从系列实验的“干扰”（记为 $\{\varepsilon_i\}_1^n$）来讲，一般情况下，它们是大约为 0 均值的或叫 0 和的（白噪声），亦即 $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \approx 0$. 那么假若该实验集（样本集 $\{x_i\}_1^n$）中，客观值（期望值）为 x_0，则可记任一 $x_i = x_0 + \varepsilon_i$，所以有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_0+\varepsilon_i) = \frac{1}{n}\left(nx_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\right) \approx x_0$$

或说

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = x_0 \tag{9.22}$$

x_0 即为相应期望值，在无量纲意义下即为概率值.

所以说概率值原则上是消除了干扰之下的度量（比例值）. 既然如此，所量得的就是客观规律值. 是对（随机环境下）不确定事物，析出其确定成分. 由于它是常量，所以是对 t 稳定的. 这里再次解释了概率值具有预测实质的机理.

特别指出，概率值在这里虽是一个被度量出来的“消除了随机干扰的必然数值”，但它是有内涵的. 实际上它不只有个概率分布函数，更是个（被测对象的）表征事物必然性的一般函数甚至是个泛函数.

3．概率 $p=0,1$ 与必然事件

要问，当计算出一个事件的概率为 0 或为 1 时，是不是该事件就是必然事件了呢？回答是否定的.

首先说，一个未知的完全事件（W）由且仅由必然事件和可能事件构成，而必然性仅属于集合 $\{0,1\}$（要么不发生，要么必发生），可能性（概率）仅属于集合 $(0,1)$，两个端点值 0 和 1 只是取极限的结果，但其随机性同样存在，并不必然（只是小概率罢了）.

具体说是因为，根据概率 p 的定义，$p=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{N_n}{N}\left(\approx\dfrac{N_n}{N}\right)$（其中 N_n 表示 N 次实验中事件发生的次数为 n），其分子分母一般会都趋于无穷大（必然概念下只能是 $N_\infty\equiv 0$），其极限值仅取决于两个无穷大的阶的比较. 所以在概率式中，尽管可能 $p=0$（或 1），然而发生的次数不为 0（或与分母等价），因此不能说（概率为 0 或 1 时）事件必然不发生或一定发生. 以上讨论对概率的近似公式也成立.

换句话说，$\{0,1\}$ 问题不属于预测性问题，而 $(0,1)$ 问题才（必）属预测问题. 所以有

$$W=\{0,1\}\cup(0,1)=[0,1] \tag{9.23}$$

三、随机过程的时间特征

“过程”一词本身即表明了时间特征，又叫做时间“记忆”性，不管它是直接的还是间接的. 所谓“随机过程”就不是只承认初始条件的动力学过程，而是同时考虑到过程中有随机干扰的过程. 显然这是十分有意义的方向，难怪说随机过程论是概率论中一个内容非常丰富的分支领域. 这也正体现了概率论的“时间数学”特征.

在随机过程论中，主要的是 Mapkob 过程（一阶记忆），仅此也已成为一门分支学科．此外，还有诸如正态过程、独立过程、平稳过程、分枝过程、样本过程、遍历过程以及生灭过程、布朗过程、Q 过程、鞅论等概念和理论分支，其中比如“鞅论”等也已成为独立分支．特别地，比如“五”段将讲到的“时序分析”以及随机微分方程论等都是一些随机过程理论，由此可见概率论中广泛存在的“过程”实质，从而说它深刻地、普遍地存在着“时间”特征．

四、统计学中的时间性

统计学，全名数理统计学，目的是在随机事物中找出它的必然性规律．由于它具有极强的应用性，获得了极强的生命力，如今的发展规模已超过了它的母学科概率论．

具体来说，统计学的首要任务即在于探知对象总体（母本）的“结构状态”，在统计学中叫做总体分布．知道了总体分布，所要的统计信息就都在其中了．问题是，原则上不可能直接得到总体分布，而只能用其子样（样本）去构作与总体分布近似的子样分布．即使为求得子样分布也需要多个样本才行，原则上要求样本越多越好．

这是因为本质上每个样本都是从所求对象的全部因素升华出的一个“泛函值”．这里既不知道或无法知道全部影响因素，也不知其函数式结构（原则上，所求对象是个“黑箱”），因此仅凭一个泛函数去求它的反问题—— 探知原对象的结构状态，是困难的．那么统计学上采用“一组”这样的泛函值（样本组）加上系列的数学手段，终于取得了成功，这就是统计学上必须采集样本和样本组的基本原理．

特别地，实践中样本组的特征（包括客观的和主观赋予的）越来越繁复，考虑也越来越细腻，由此还产生了所谓“数据挖掘（data minig)”分支，同时创造出越来越多的统计方法，这也是统计学越来越深入、扩展的机理所在．

总的来说，子样分布所在的空间形式有两类：一类是结构空间，另一类是时空空间．对于结构空间中子样分布（总体分布的近似）的探讨方法，主要有参数检验和非参数检验两类方法：前者是在先验猜测（通过经验观察）的基础上，建立起一个函数关系后再用子样“估计”出其中参数，并作出**假设检验**，以判定相应分布函数类型诸如正态分布、Poisson 分布等的合理性．当先验猜测其分布函数类型仍难以定玄时，宜采用直接从问题出发的非参数检验法，诸如**拟合检验**或**经验分布检验、秩和检验**等等．当然这时仍需要以样本集作为基本信息，同样是从中析取所需要的内蕴信息．

至于时空空间中的分布函数问题，则具有典型的时间特征．在统计学上叫做**预测**问题，在计算数学上叫做**外推**问题，在经济学上叫做**计量分析**问题．该类问题的特征是“未知的分布函数是沿时间轴来分布的”，如图 9.3 所示，t 是考察问题的“现在”时刻，需要的是预测 t 的右侧适当区间上的分布函数 f，为此只能通过 t 的左侧（历史上）去找出 f，然后外推实现．为此，又只能通过历史的子样集来近似地确定 f 左侧的分布函数．再根据 f 的定义域（往往超过图中 t 点）推出 t 右侧的分布函数，以达到预测的目的．如图 9.3 中统计曲线（其 t 左侧为实线，t 右侧为虚线）即表明这一思想．

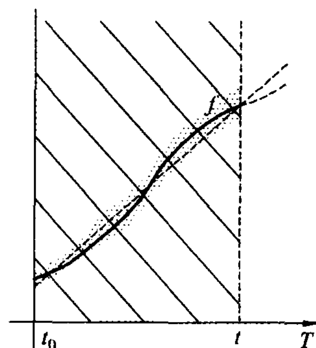


图 9.3

统计学上具体采用的统计预测方法主要是“回归分析法”．回归分析是概率统计学中一个分支理论，已发展成了线性和非线性、一元和多元乃至动态的等回归分析．回归分析的基本思想是首先根据样本组的分布特征以及对问题的思辨认识而先验地选定一个模型类型，然后求出（估计出）模型的相应参数．在经典统计学中常常选取线性模型，比如图 9.3 中，虽然选取逻辑斯谛（Logistic）曲线 f 更合适，但作为近似，在一定的判定标准下选作直线往往也是可以的．这时若预测期间较短（短期预测），误差仍会很小，符合要求．至于对参数的估计，一般采用最大似然估计法，具体到回归分析上叫做最小二乘法．所谓最小二乘法，系利用拉格朗日条件极值原理，对所选模型在所给样本下，保证误差最小时，求得参数估计值，从而完全确定所给模型，以作预测．

最后，我们说统计学中的时间性，即表现在此预测性问题上．

鉴于如今概率统计方法已成为普及知识，这里即不必举例和作更多叙述了．

五、时序分析学与时序认识

1．时序分析学

1927 年 G.Yule 首次提出一个自回归（AR）预测模型，1931 年 Box 等人再次建立 AR 预测模型，并于 1943 年，控制论创始人维纳正式将其发展成一门应用数学分支“时序分析学”，简称时序分析．它是横跨概率论、控制论、泛函分析与常数分方程的一个交叉性学科．不过虽说时序分析学涉及控制论，也为维纳所发展，但毕竟时序分析更属于随机过程，因而不能用控制论的确定数学方法去建模．这是因为顾名思义，时序分析的特征在于“时序”性和“分析”性两个方面：

（1）“时序”性，即时序样本$\{x_t\}$的序号具有明显的时间意义，不可任意调换．这与统计学中某些“无序样本”的意义有所不同．比如，对一批产品作抽样检验，以确定其质量分布规律时，其样本即与其序号无关，或说其序号不具有时间意义．但比如要用统计方法对一个企业作经济增长预测，这时的样本组序号即有时间意义了．因此，样本序号的时间意义并非时序分析方法独有的，而构成其独有特征的还在于其“分析”性．

（2）“分析”性主要表现为它的“建模”特征．总的来说，它是接受了各类机械振动模型，诸如

$$m\ddot{x}+a\dot{x}+bx=p(t) \tag{9.24}$$

或

$$m\ddot{x}+a\dot{x}+bx=c\dot{y}+ky$$

等的启迪，以及差分格式和控制论模型（控制项）的思想启发，而提出的模型（参见杨叔子等《时间序列分析的工程应用》），一般形式如

$$x_t-\sum_{i=1}^{n}\varphi_i x_{t-i}=a_t-\sum_{i=1}^{m}\theta_i a_{t-i} \tag{9.25}$$

式（9.25）是个随机差分方程，具体叫做 n 阶自回归 m 阶滑动平均方程，记为 $\mathrm{ARMA}(n,m)$．其中φ_i为待确定的自回归参数；θ_i为待确定的滑动平均（对随机干扰作“光滑”处理的）参数；a_t为残差值，由白噪声生成；时间序列$\{x_t\}$中x_t为现时值，式中x_{t-i}为第i阶“记忆”值．

以上仅是时序分析模型的一般形式叙述，作为一个实际问题，是否能适于建立（9.25）型模型，是有条件的，那就是在时序性条件下更要求$\{x_t\}$满足“平稳性”和“零均值”．简单说，平稳性表明$\{x_t\}$所受的随机干扰因素与时间无关，其严格定义需根据$\{x_t\}$的谱分布函数和自相关函数的统计特征（兹免）；在平稳性之下，零均值条件即可通过所谓“零均值化”来实现．这往往是在必要时才能用该方法．

时序分析的优点在于它的模型中已充分考虑到了随机因素造成的影响，并进行了处理．这就使得实践中许多难以用确定数学方法建模的问题，都能很好地用时序分析方法．诸如，当机器在运行中的一些系统参数无法观测时；一个系统可观测多个时序，而这些时序间的关系不清楚时；系统的噪声太多、太强以至于无法测准等情形时，难以用控制论的系统辨识法，却能用时序分析法．

时序分析法常常用于描述动态过程，因而能用于预测、系统辨识和系统控制等，从而在各种工程技术和经济、交通等领域都有广泛的用处．

2．时序认识

图 9.3′ 中（a)、(b）分别是同一个时序过程的连续型与离散型两种表示：前者是（表）系统的实际过程；后者系其实践上常用的（包括实际操作和一种理论分析的）形式，因为观察总是离散的，只是离散的步长有大有小的差异.

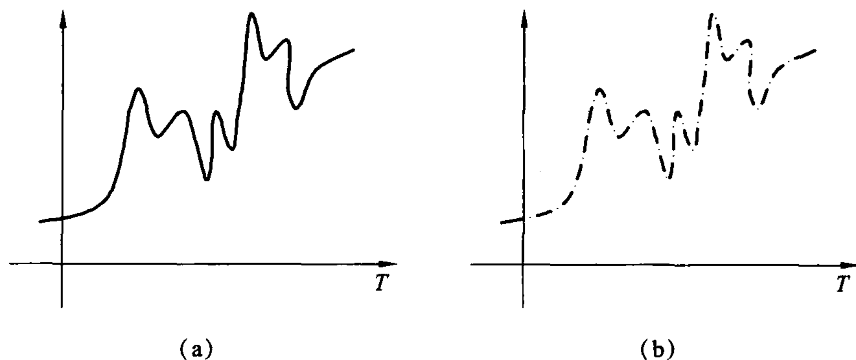


图 9.3′

那么这就存在一个由技术的（b）去推知客观的（a）的问题，可归纳为三种方法：

第一类是实践技术操作法，此即采用增加观测次数（增密离散点，缩短步长）的方法容易逼近（a).

第二类是数学理论方法，此即由系统一定的时序离散信息集，推知原系统运行过程问题．这时又分为统计建模求解法和数理模拟、建模求解法两种方法（皆已谈及).

第三类是这里特别要说的思辨认识法．显然，比较起前两类方法来似乎这是最不精确、最不实在的，却不能不看到这也是最基本的、最普及的方法．首先它在社会科学研究中是（不得不作为）常用的方法，其次即使在执行前两类方法时往往少不了（在脑子里）会自然地用到这一方法．因此我们不能忽视它，必须正视它．相信这一问题只要提出来即算得到解决，这里仅特别提出（例述）一个负面的问题.

例 2 历史本是个连续的时序过程，客观说既然成为历史就是雷打不动的事实了．但为什么对历史从来都争论不休？原来正是因为上述原理，正是后人对历史只知道些离散事实，自然难以推断出真实的原过程了．显然，不同的人基于不同的离散点集可提出不同的“结论”（连续轨线）来了．更何况，若带着不同观点到历史中去选取其离散事实集，更会得出不同“结论”了．难怪有人说：“历史是任人打扮的小姑娘”.

第五节　不确定数学与复杂性数学

一、关于不确定数学

1．原始概念

不确定数学的原始概念系指随机数学和模糊数学的总称．相对于经典数学(又叫确定数学）的确定性来，不确定数学与确定数学在逻辑上有两大区别；一是经典数学属{0,1}逻辑，又叫二值逻辑；而不确定数学则属于[0,1]逻辑，又叫多值逻辑或无穷值逻辑．另一区别是确定数学完全满足形式逻辑的四大定律（第五章第二节)；而不确定数学则有缺陷，它不满足“排中律”．

2．现代概念

随着数学和整个科学的现代化进程，在纯数学领域和应用数学范畴中具有种种不确定性的分支学科不断出现，且越来越多．比如混沌理论、非线性理论、耗散理论、计算复杂性中的 $P=?\mathrm{NP}$ 问题、数学中不完全问题，实数理论、数理经济学中不可能性问题以及越来越多的悖论、怪圈、佯谬问题，乃至“物元分析”中提出的“不可解问题”等等，对它们的数学探讨都引出不确定数学．仔细观察可发现它们有着一个共同的逻辑特征，即都不属于典型的形式逻辑范畴，而是（按第五章的思想）进入了形式逻辑的边沿区域或说非典型的形式逻辑范畴，这时它们对“四大定律”当然不一定完全满足．把所有这些领域统称为复杂性数学．

总之，很显然，**现代的不确定数学，应该包括随机数学、模糊数学和复杂性数学**．

3．随机数学与模糊数学的区别

虽然随机数学与模糊数学皆属不确定数学，其度量值皆在［0,1］上，逻辑上皆缺乏排中律等，但它们仍有着本质的区别．首先即表现在，随机概念和概率概念中都必须含有时间意义，离开了时间意义就谈不上随机与概率．比如我们说某过程中受到随机因素干扰，虽然说干扰因素不具时间规律，但这件事是相对于时间概念来说的．又如说到概率，则必具预测性的时间意义，它是对 0,1 事件的预测．比如说任意抽取某一商品为次品的可能性是 1‰，这就是一种预测．它使你预先知道买回这种商品一般不会有问题，而真正买到手，则要么是正品、要么是次品，即不再有那个 1‰了．

相反地容易看到，模糊概念则不含时间意义，或说它是一个空间结构概念．从另一方面说，模糊关系是客观世界事物间普遍存在的一种结构特征，一种具有

相对稳定性的结构关系，它的度量只能是［0,1］的，原则上不可人为地变成{0,1}结构．但“概率”和“随机”的产生则不完全是自然的、不是不可人为改变的．抽象说来，人的能力和设备是可以达到掌握和控制事物变化过程中所有因素的，这时问题即成为{0,1}的了，亦即转化成为确定的了．因此本质上说所谓概率论、统计学等随机数学只是人为的一种处理方式，是一个本来属于更高维的确定问题，只是出于无能为力才不得不将其作为低维的“随机问题”来解决．所以本质上说它只是一种处理技巧，并非客观的本原性存在．但模糊结构则不然，它是客观世界的本原性存在．由此足可见随机数学与模糊数学的本质差异了．

总之，随机问题是时间性的，模糊问题是空间性的；随机问题是相对性的，模糊问题是本原性的；随机性是高维问题的低维认识，模糊性是客观世界的本来结构；随机数学，特别是统计学，是从样本（泛函值）求原事物的（必然）规律，是反问题，模糊数学与必然数学一样，是直接探索事物的结构规律，是“正”问题．

但随机数学与模糊数学有两点是共同的：一个是两者都是区间［0,1］上的数学；另一个是它们都是为求客观世界的“必然”规律．具体说来，随机数学是在随机之中求“定常”，模糊数学是在模糊之中求“分明”，不确定数学是在不确定之中求“确定”，但定常、分明、确定皆属一个“必然”概念．

二、模糊数学

自 1965 年计算机科学家 L. A. Zadeh 提出模糊（Fuzzy）集理论以来，模糊数学即宣告诞生并得到迅速发展，尽管它也与许多新学科，诸如概率论、集合论、非欧几何、傅里叶分析等的出现一样，受到种种非议，至今尚未完全平息也罢．对模糊数学的非议主要是说它只是经典数学的平移，没有独立特色．但它的发展仍然迅速，其重要原因即在于：① 模糊性道出了客观世界普遍的存在特征，因而它有着广阔的实际背景；② 模糊逻辑占领了逻辑学中一大片领地，使它有了坚实的逻辑基础．总之，是模糊数学的应用前景和逻辑基础奠定了它旺盛的生命力．

1．模糊数学理论的发展

（1）模糊集基本概念：

设分明集 X 为论域，F^X 为 X 的一切模糊子集的集合（也可视为 $X\times[0,1]$ 的幂集，叫做模糊幂集），$\forall A\in F^X$，可视 A 是由一个模糊映射 μ_A 给出的，

$$\mu_A : X \xrightarrow{x\to\mu_A(x)} [0,1]$$

其中 $\mu_A(x)$ 为 $x \in X$ 的模糊度，从而 A 可表示为

$$A=\int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

这里“$\int_X$”在 X 为有限集或无穷集时，皆表“形式”和，最终仍是一个集合而非数；形式 $\frac{\mu_A(x)}{x}$ 不是通常分式，仅表示在分明元素 x 处的模糊度为 $\mu_A(x)$．如图 9.4 所示，A_c 称为 A 的**余集**，叫子集 $A_\lambda=\int_X \frac{\mu_A^\lambda(x)}{x}$ 为 A 的 λ 截集（或 λ 层次），$\mu_A^\lambda(x):\mu_A(x)\geqslant\lambda$．

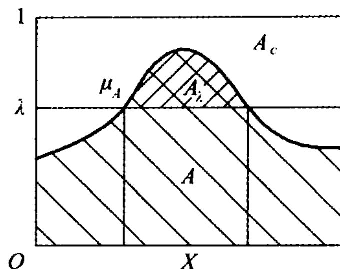


图 9.4

（2）模糊数学的通有研究．

这是指以模糊集合为直接研究对象进行的，诸如在基本运算关系和相应的系列概念的建立上，所产生的理论“扩展”．比如，除了模糊集的“基本运算”外，还有诸如模糊集的凸性研究等“集合论研究”与模糊集的范畴性研究、模糊格的研究等“代数性研究”，以及模糊数、区间数之类概念的建立与相应的“运算研究”等．

（3）模糊拓扑的研究．

模糊拓扑是一种格上的拓扑，若记分明集为 X，则其幂集为 2^X，其模糊幂集为 F^X，那么若 F^X 上能赋予格结构则成为 X 上的模糊格，记为 L^X，这时再在 L^X 上赋予拓扑结构就成为模糊拓扑．

由于格的特征是序结构和代数结构的复合，所以可说模糊拓扑的特征是把拓扑结构与序结构、代数结构融合起来的**复合结构**．

当前关于模糊拓扑研究有两个学派：一派是英国剑桥的“无点化”学派（Locale 理论）；另一派是中国川大的“有点化”学派（重域系理论）．

2．模糊数学的逻辑研究

是模糊数学的诞生推动了多值逻辑的研究，特别是因为模糊数学是［0,1］数学而激发了无穷值逻辑（又叫模糊逻辑）的研究．

模糊逻辑的研究有两个特点：一个是较多地移植数理逻辑的思想和方法，包括一些符号集、公式集，以及真假概念和语句、命题等概念都可以说是从数理逻辑学移植过来的；另一特点是它的研究紧紧围绕着应用，形成了丰富的不确定性推理方法，其中仅关于模糊集的不确定性推理方法（叫做模糊推理方法）已有多种，比如有 Zadeh 方法、Baildwin 方法、Tsukamoto 方法、Yager 方法、Mizumoto

方法和徐扬方法等.

此外，比如专家系统理论和模糊逻辑电路、模糊语言逻辑等应用性研究也都体现了模糊逻辑的应用特征.

3．模糊数学的应用研究

已经知道，模糊数学的强大生命力主要源于它的应用性．这点即使在其逻辑研究中也体现得十分鲜明，在模糊数学本身则更是如此．模糊数学的应用主要体现在以下两个方面：

(1) 模糊方法.

这主要表现为模糊规划方法、模糊决策方法、模糊评价方法和模糊识别、模糊评判、模糊的聚类分析等方法，这是模糊概念和模糊表述方式在管理科学、控制论和聚类分析中的应用，它能够充分体现为模糊概念和模糊运算下的优越性.

(2) 模糊技术.

模糊数学不仅作为模糊逻辑方法和模糊定量（软）方法而紧紧为着应用，如今还形成了具有设备投资和产业化特征的“技术”，叫做**模糊技术**.

目前的模糊技术主要体现为**模糊控制**特征，将{0,1}事物［0,1］化，这一技术已在种种生产系统和工程现场展开．此外，比如模糊探测仪、模糊诊断仪、模糊家电等的开发亦皆属此.

最后顺便提到，颇具戏剧性的是，模糊数学产生于计算机科学，其初衷是为着解决计算机“智能”化中的“非模糊性”缺陷，但如今在其他学科领域已颇为受益，然而在其发祥地的计算机领域还远远谈不上实现其初衷．当然这也是完全可以作出科学理解的事实.（猜测：出于“二象论”观点可认为，现在的电子级计算机其电子的虚象还难以技术化，也许待下一代再下一代的“量子级、夸克级计算机”有望增进其模糊化问题，因为到那种级别，其（量子、夸克的）虚象更强，更利于模糊化吧.）

三、复杂性数学

复杂性数学不是一门独立学科，而是一类学科的总称，且这类学科还在越来越多地增加着．按照查德的互斥原理，“一个系统愈复杂，其数学表述的精确性将愈差．当复杂性超过某一临界值时，其复杂性与描述的精确性将互斥”．换句话说，科学的复杂性对应于数学的难以精确性的描述．据此我们把定量分析中难以作出精确性描述的领域都叫做“**复杂性数学**”.

复杂性数学的“复杂性”来自两个方面：一个是随着各个学科的现代化深入，将产生各自的“复杂性”；另一个是具有典型的复杂性特征的新学科、新方向不断“涌”现.

现代科学已进入定量化时代，因此现代科学的复杂性首先应表现在数学描述的复杂性上. 由此再次看到了复杂性科学与复杂性数学的对应性，因而复杂性数学也应该具有广泛性和继续扩展性.

事实上，复杂性具体到哪一门学科分支，都有其具体的复杂性数学和相关概念表征着它. 比如，在混沌系统中混沌就是复杂性；在热力学系统中正熵 S_+ 增就是复杂性；在人文社科、经济管理系统中不可逆就是复杂性，难于精确度量就是复杂性；在耗散系统中涨落就是复杂性，系统远离平衡态就是复杂性；在自然科学中非线性就是复杂性；在“物元分析”中关联函数 $K_{\bar{x}} < -1$ 或关联度 $K_{\bar{x}}(u) < -1, u \in U$（论域）者是复杂的；计算数学中 $P = ?\mathrm{NP}$ 问题是复杂的；任何对象（或叫系统）当考察的层次多了都是复杂的；数学中，高维空间、非欧空间是复杂的，世界公开问题是复杂的，哥德巴赫（1+1）问题是复杂的，连续统猜测和 ZFC 公理问题是复杂的，一切进入逻辑的边沿、模糊区，难以判定其状态的、难以确定的问题如悖论、怪圈等“超逻辑”问题都是复杂的.

尽管复杂性数学分布广、形式多，但它们有一个共同特征，即具有各种各样的不确定性，所以它们应该与不确定性数学类有着广泛“交”. 不过也是鉴于复杂性数学中具体“复杂性”的非统一性，这里不可能一一叙述出来.

四、网络数学

根据“二象论”(第四章第四节)，任何系统皆由虚实二象构成. 那么社会的实在象必有其虚拟象与之对应，且应该与此实在象同样深刻、同样复杂.

的确如此，业已兴起的“网络世界”就是其虚象中一个重要形式. 如今可以说网络已成为一面镜子映照出社会生活的方方面面. 诸如网络营销、网络会议、网络查询、网络金融、网络交友、网络游戏乃至网络犯罪等，应有尽有，且已经形成了一个对偶于现实社会的“网络社会”.

当然，网络社会作为又一个系统仍有其二象. 其实象就应该是种种网络设置、网络运行、网络技术等属于“结构”特征；其虚象应该是网络管理、网络规划、网络交际等属于“信息”特征. 显然其中“网络数学”是少不了的. 既有的虽然已有诸如研究“结构”的图论和研究“信息”的信息数学等，显然都还很不够，还不能与实在社会这一象相匹配.

“网络数学”除涵盖信息数学外，还有诸如网络结构、网络图论、网络管理、网络运筹之类非信息学科研究任务.

总之，“网络数学”的产生势所必然，虽可说已有了一些苗头，但仍属待创学科，这里只能作为问题提出，吁请关注.

第六节 优化数学

人类似乎永远处于一种迷雾中，永远存在“下一步怎么走，明天怎么办”的问题，优化数学就是在这样的环境中诞生和成长的.

一、价值数学与优化数学、运筹学

1. 价值数学

已经知道，从哲学角度看，人们对整个客观世界，也包括主观世界的认识特征可归为五论：本原论、认识论、方法论、实证论和价值论. 前四论是排除了自我的，具有纯粹的客观特征，唯有价值论则不然，它正是考虑了个人或某方利益下的认识，亦即为着某种价值观的认识. 比如，自然科学可说是完全属于前四论的，但社会科学中即使文、史、哲也不全属于前四论，而其他学科以及社会活动中的大部分内容则更属于价值论范畴的，因此价值论领域也是很宽广的.

顾名思义，在价值论意义下的一切思维和活动，都少不了“利害关系”和“划算”与“不划算”的计较，因此这里也少不了数学. 在小事诸如蔬菜市场和人际关系上，尚可自如地应对，但作为企业部门及地区管理者在制订经营策略或涉外关系时，就需慎重了，因此需要价值数学. 实际上，科学中已经发展起了丰富的价值数学.

价值数学中最重要的内容是优化数学（见下小段)，此外还有预测学、社会度量学以及经济数学、金融数学、管理数学乃至系统工程学. 因为它们或者是完全服务于社会价值观的，或者是主要服务于社会价值观的. 比如社会度量学中的评价、评估、社会统计、企业诊断等软度量，自然都属于社会价值观的活动. 此外，比如层次分析法、系统动力学、物元分析法等也都属于价值数学.

总之，价值数学是个分布宽广、门类繁多的数学范畴，这里不可能一一述及，好在其中不少学科已从另外角度在别的部分叙述到了，本节仅就优化数学作出重点叙述.

2. 运筹学与优化数学

运筹学，原名“Operational Research”，经科学院许国志、周华康先生根据“汉书·张良传”上名言“运筹帷幄中，决胜千里外”，译作**运筹学**，立即被大家接受．运筹学起自第一次世界大战时期，形成于第二次世界大战时期，后来一直积极发展，至今方兴未艾．

运筹学的宗旨是用数学工具为人类各种活动作咨询、策划，所以运筹学属于价值数学．运筹学的原有范畴是比较分明的，特别在20世纪70年代以前的运筹学，主要指控制论、规划论、排队论、存储论、博弈论等．至于现代运筹学，从运筹学杂志来看，其范畴已逐渐扩展到几乎一切优化领域，其研究仍然分为理论探讨与方法研究两个方面，且以后者为重．

优化数学（optimization mathematics）系指一切运用数学工具寻求在价值、效用、效益或心理满意度等前提下的最佳方案、最佳状态与最佳途径的内容和活动．正如价值数学一样，优化数学不是一门独立学科，而是一种泛指．

从实质上看，运筹学与优化数学应该是等价的，但由于运筹学已成为基础学科，且《运筹学》（课本）的内容有限，范畴界定较为明显，所以给人的印象是，运筹学就是《运筹学》，似乎比较狭窄，只能算是狭义的优化数学．因此我们也遵照这一世俗，把运筹学视为狭义的优化数学．

不管怎样，出于本节的简要性，下面仅就运筹学与优化数学共通的典型内容作一总体认识．

二、优化数学基本原理

上述优化数学常常是从应用角度来说的，因而多重于实用方法，不过这里罗列一些作为所有优化数学的数学基础的基本原理．

1. 最值原理

这是很直观的，对于（比如最小值）问题

$$f(\boldsymbol{x}) \to \min$$
$$\text{s.t. } G(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{B}$$

求出

$$\min\{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \Omega = \{\boldsymbol{x} : G(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{B}\}\} \triangleq f(\boldsymbol{x}^*)$$

则 $\boldsymbol{x}^*$ 即为所求．要强调的是，最值（大或小）是在整个 Ω 域上比较的结果，具“全

局性”，应与极值的“局部性”区分.

最值原理表现在物理学和经济成本分析上就是最小作用原理，表现在效用、效益上就是最大值原理.

2．拉格朗日（Lagrange）条件极值原理

理论力学的发展经过了三个阶段:

第一阶段是牛顿力学，其特点是研究自由运动，典型方程为

$$\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

其中 V 为势函数，x 为运动路程.

第二阶段是 Lagrange 力学，是拉氏创立了分析力学，其特点是研究约束运动，提出广义坐标 q，并采用变换 $L = T - V$ （T 表动能函数），得到泛函

$$J(q) = \int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t$$

其典型方程是欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{9.26}$$

第三阶段是哈氏的，见“3”.

至于一般函数的所谓拉格朗日条件极值原理，也称为拉格朗日原理、拉氏原理或极值原理，它是在欧氏空间坐标下的分析，基本形式为：对问题

$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{x}) \to \min(\text{或}\max),\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \\ \text{s.t. } G(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0},\ G\text{可以是向量} \end{gathered} \tag{9.27}$$

建立 L-函数

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda G(\boldsymbol{x})$$

其中 λ 与 G 同维. 再解方程组

$$\nabla L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\nabla\text{ 为梯度算子}) \tag{9.28}$$

即成.

3．哈密顿（Hamilton）变分原理

哈密顿变分原理又叫哈密顿原理，或叫变分原理，也直接叫最小作用原理. 哈氏对牛顿力学作变换 $H = T + V$，得到的典型方程是哈密顿方程:

$$
\begin{cases}
\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\
\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}
\end{cases} \tag{9.29}
$$

其中 $p=\dfrac{\partial T}{\partial q}$，这就是哈氏变分原理.

顺便指出，现代的分析力学（建立在辛流形上的）就是从（9.29）出发的.

4．临界点原理

临界点原理又叫 M.Morse 原理，它是在函数“极值点”概念的深化和推广意义下，形成的一个非线性分析的分支领域，在不同的背景下，临界点概念可以被推广、引申、转义成诸如**极值点**、**驻点**、**平衡点**、**均衡点**、**奇点**、**不动点**、**分支点**、**突变点**、**极限点**等概念. 这在第八章第四节也曾从另一角度谈到过，下一节还将涉及.

“临界点理论”主要属于非线性泛函领域，当然比如在拓扑学、动力系统甚至在运筹学中对它也有专门的研究. 这皆因它的广泛存在性和重要性.

同时，在多目标规划中临界点概念还被推广为 Pareto **最优概念**，记为 p-最优. 这是一类所谓次最优点或叫最佳点概念下的研究（续见第六节、三）.

5．max-min 原理

max-min 又叫做“**马鞍原理**”、“**爬山原理**”、极大-极小原理，最初产生于博弈论中的最大-最小决策，后来得到非线性泛函的深刻研究，获得著名的“爬山引理”、“形变引理”等系列理论. 如图 9.5 所示，人们要翻越马鞍形山峰，自然是以过“鞍点 A”的抛物线路径 L 为最优方案了，那么这时 A 对于山脊是 min 点，对于路径 L 是 max 点，所以称 A 为 max-min 点. 可贵之处在于将这一生活原理升华成为理论，成为一种思维方法.

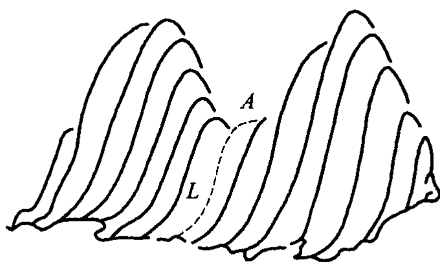


图 9.5

三、求最优方案的优化数学

这是在高维空间（问题涉及的自变量、因变量对应的高维欧氏空间）中求最

优“点”的问题，相对说来它不具有时间意义，是静态问题，或说是求结构空间中一种（最优）状态的位置问题．这类问题在社会实践中是广泛存在的，因其方法简便有效、容易推广，已纳入大学基础教程，成为运筹学的主体内容，其中几个主要分支是：

1．规划论Ⅰ：线性规划

这是运筹学中的主要内容，分为单目标规划和多目标规划两种．单目标规划中又分为线性规划和非线性规划两大分支．线性规划由于其目标和约束皆线性，决定了它的解法的特殊性．例如，图 9.6 可设目标为平面π，对于约束集（可行域，多边形）Ω来说，最优点不可能在Ω内实现，且必能在Ω的顶点上找到．然而这时不能用微分手段，只能在“最值原理”下去寻找捷径，这就是单纯形法的创生背景．目前，关于单目标线性规划的求解方法（或直接说成计算方法），除了对已经普及的单纯形法的种种改进和完善外，还在产生新方法．比如，1959 年产生了 Kamaka 算法，之后所引起的种种内点法的问世即表明了这点．

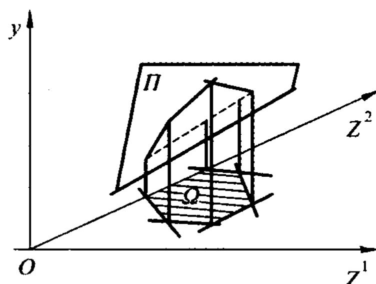


图 9.6

2．规划论Ⅱ：非线性规划

在规划模型中，其目标函数与约束函数只要有一个函数非线性，整个问题就成为非线性规划问题．因为这时据拉格朗日原理，相应的（形式上的）L-函数总是非线性的．尽管作为该非线性规划问题，不一定适于用拉格朗日条件极值法，但其非线性实质决定了它是不违背L-极值原理的．

自然，非线性情形更为复杂，其最优点（解）既可落在可行域Ω内也可落在Ω的边界上．当其落在Ω内，且目标$f(x)$和约束函数$G(x)$可微时，原则上即可用微分学原理（仿拉氏条件极值原理）求解了．不过要看到，解非线性问题一般比解线性问题复杂得多，因而没有一种统一的方法，往往是根据具体问题的特征去创造特殊的方法，由此产生了诸如凸规划、二次规划、几何规划、整数规划、分数规划、多层规划等．同时，根据问题的约束条件特征还有诸如最速下降法、梯度法、共轭梯度法、牛顿逼近法、抛物线法、黄金分割法、转轴法、加速法、罚函数法等等，可谓不胜枚举．它们哪个都不具备通用性．下面来例示一个适用面较宽的、重要的基础性判别条件．

***K*-*T* 条件**：这是一般非线性规划问题的最优化条件，是直接推广拉格朗日条

件极值原理而来的一种判别方法．这是 1976 年由 Kuhn 和 Tucker 提出来的，叫做 K-T 判别条件．比如对模型

$$\min f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m \\ h_j(\boldsymbol{x})=0,\ j=1,2,\cdots,K<n \end{cases} \tag{9.30}$$

若 $\boldsymbol{x}^*$ 是（9.30）的可行解，f 和 g_i 在 $\boldsymbol{x}^*$ 可微，h_j 在 $\boldsymbol{x}^*$ 连续可微，则存在广义拉格朗日常数（向量）$\boldsymbol{r}=(r_1,\cdots,r_m)$, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_K)$，使得

$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}^*)-\sum_{i=1}^{m} r_i\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)=0 \\ r_i g_i(\boldsymbol{x}^*)=0 \\ r_i\geqslant 0;\ \ i=1,\cdots,m \end{cases} \tag{9.31}$$

总之，至今非线性规划问题还没有个通有的解法，都是根据具体问题去创造发挥．也正因如此才使得现有方法越来越多，但通用性都不强，我们应该有接受“诸子百家”的思想，但要立足于发挥自己才能，去创造新方法．

3．规划论Ⅲ：多目标规划与目的规划

多目标规划又叫多目标决策，这是更为逼近现实的思想．因为作决策、规划时往往既有多种约束，又有多个目标，甚至这些目标之间常常不相容．比如，既要安全又要高产；既要低碳又要低成本等就是一些不相容因素，却需要同时成为优化项目的目标．所以多目标规划的提出是很有现实意义的．

多目标规划模型，一般形式如

$$\max(\text{或}\min)\ u(\boldsymbol{x})=\{u_1(\boldsymbol{x}),u_2(\boldsymbol{x}),\cdots,u_K(\boldsymbol{x})\}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} G(\boldsymbol{x})\leqslant B \\ \boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n \end{cases} \tag{9.32}$$

其中 $u_i(\boldsymbol{x})$ 表示第 i 种目标函数，可为线性或非线性；约束函数向量 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$（$m$ 维）可为线性或非线性，当其为线性时记为 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{G}=(g_{ij})_{m\times m}$．总之系统（9.32）与一般规划模型的差别仅在于“多个目标函数”．

多目标规划的研究在 20 世纪五六十年代十分“热”，很快产生了五十多种方法，不过至今没有一个得到流行．被认为最为直观、简易，较为流行的方法还是多目标的“单目标化”．具体说就是给出单目标形式

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i u_i(\boldsymbol{x})$$

其中 α_i 为权系数．它既能调节各 $u_i(x)$ 间的重要性尺度，又能调节各 $u_i(x)$ 间的量纲并使之统一，以使得 $\{u_i(x)\}$ 具有可比性、比例协调性和可运算性．一经化成单目标，以下的讨论则是单目标规划了．

多目标规划中的困难主要在建目标函数上，缺乏简易便于操作的方法．因此 20 世纪 70 年代以来，主要是从应用和计算方法的实现上研究较多．而在理论上体现为方向较为分散，主要有来自所谓“非劣势解”等概念上的推广和派生理论、“多层优化”理论和“目的规划”论等．

特别地，“目的规划”是 1961 查里斯等提出的在多目标规划中这样的一类问题，其目标不直接含最值性，或说其最值包含在条件之中，因此不便直接建立优化模型，这就是目的规划问题．对此，常用的方法是，首先求出一个间接的目标函数，以最终成为直接的最值目标函数问题，便于建立典型的优化模型求解．限于篇幅兹免赘述，可参见文（《系统工程理论与实践》，10（1995））．

4．决策论

本着决策论的原始概念，若作一个决策须经历三个阶段．首先是调查和分析现状以提出问题；其次是穷举出为解决所面临问题，有多少个方案；最后是作出各方案的评价比较，以选出最优方案．在无穷方案情形下则应作出一般方案的形式表述，再用抽象方法作出选择．由此还可看出，事实上，上述规划论就是这里（无穷）多方案情形下的决策论．所以说决策论与规划论关系密切，在某种意义（无穷方案）下它们是等价的．

但决策问题与规划问题也有实质性差别．比如，规划问题是求满足一定约束（现实条件）下目标最优的实施方案，着眼于通向最优目标的过程设计，着眼于现实条件；而决策问题是求具有最好预后效果的最优方案，着眼于未来，着眼于预期效果．因此，解决决策问题的最大特点是预测和预后．“预测”是为了估计现有状态的发展趋势，以便选择方案；“预后”是利用统计方法估计各方案的风险和效果，以便最终选定方案．

正因如此，决策问题是未来型问题，在很大程度上是风险问题、概率问题、不确定性问题．因此有风险型决策类、不确定型决策类、信息不全型决策类、博弈型决策类等，而这些皆具有随机性．

5．博弈论

1944 年博弈论（又叫对策论）产生于经济学，尔后成为应用数学的一门独立分支．这是已熟悉的代数学家、计算机之父、“一般均衡”证明思想重要提供者、蒙特卡罗（统计）法创立者之一的数理经济学家冯·诺伊曼与经济学家摩尔根斯

坦合作创立的.

博弈论提出了社会生活中一个十分普遍而又十分重要的博弈概念，本身就是一个很大的成功．同时，比如它也与分形学的思维特征一样，不仅提出了重要概念，而且立即使之形式化、模型化、数学化，从而得到了进一步的成功.

我们知道，人类的社会生活除了从事理智的“善事”这样的局部、暂时场合外，都是为着自身利益在运作，足可见博弈场合之多，博弈情形之复杂了．的确，诸如对策、谈判、砍价、竞争、比赛、战争、交易、破案等，哪里都有博弈实践.

博弈论的问世，不仅其数学方法给了我们以知识，而且其对策理念更给了我们以思想武装，提高了我们的意识和思维空间.

博弈论在理论的发展上曾受到过一次挫折，那就是冯·诺伊曼与摩尔根斯坦曾猜测“一切博弈问题均存在稳定集解”，但是 1969 年得到了 W.F.Lucas 否定性的证明．这使得人们对博弈问题的数学热情受到了一定的影响.

博弈论的理论发展以 1950 年代作为一个分界，其前为经典时期（可叫做“代数博弈”时期），主要是研究冯氏等提出的在纯策略和混合策略下的二人“0 和”、“非 0 和”博弈问题以及 n 人博弈问题．由于 $n\geqslant 3$ 时可能产生很多组合情形，其中最基本的类型是 n 人合作博弈和 n 人非合作博弈两种.

1950 年进入“分析博弈”时期，表现出一种解析的、动力学的特征．首先是纳什（Nash）证明了 n 人合作博弈存在**均衡点**，宣告了博弈论经典时期的结束，并于 1951 年与塔克（Tucker）一起提出 n 人非合作博弈，使博弈论进入现代时期.

现代博弈论主要提出了动态博弈（泽尔腾）、微分博弈和个人理性、信息不完全博弈（海萨尼）等概念，此外，便是结合具体应用对象进行研究．1994 年纳什、泽尔腾、海萨尼三人因此获得该届诺贝尔经济学奖．2005 年又有罗伯特·奥曼和托马斯·谢林二人因此获得诺贝尔经济学奖．2007 年又有赫维茨、马斯金、罗杰-B-迈尔森等因此获得诺贝尔经济学奖．近二十年来博弈论在信息经济学（契约理论）上的应用已成为它的一大特色.

6．图　论

图论又叫**网络分析**，它是由顶点集 p 和边集 q 构成的网络式图形上的数学，记为 $G(p,q)$．历史上促进图论发展的命题不少，首先是欧拉关于 f 个面、p 个顶点、q 条边的凸多面体的欧拉公式:

$$p+f=q+2$$

的问世．其次是欧拉关于柯尼斯堡**七桥问题**的解决（1736 年).（这些也是形成组合拓扑的原始思想）．再就是**哈密顿回路问题**（1859 年)，通常叫**旅行商问题、货**

郎担问题．这是至今还在吸引着研究者兴趣的问题．此外，还有**四色问题**（1852年）也是至今未息的历史性难题，虽然在1970年代用计算机作出了肯定性证明，但纯数学的证明还指日无期．

如今，图论已从代数研究发展到微分图论、随机图论等，特别还受计算机理论的影响，使得网络分析成了图论的理论重心，诸如网上最大流问题、最小费用流问题等．总之，图论也是优化数学一个重要的分支领域．

7．排队论、储运问题及其他

作为运筹学寻找最优方案的数学方法，其内容还在不断增加，即使经典方法也还有诸如排队论、存储论、运输问题以及最近问世的搜索论、数据包络分析（DEA）等，尚未正式谈及，这里也仅点到为止，不再一一叙述．

四、求最优轨道的优化数学：控制论等

相对于“三”中寻求静态意义下最优状态的优化数学，下面来谈谈寻求（动态意义下）最优途径和最优过程的数学分支，它们可以统归于控制论麾下．

1．控制论Ⅰ：控制论通议

作为工程上的控制技术研究，早在1868年已有麦克斯韦（电磁场方程之父）关于蒸汽机和1920年米诺斯基关于船舶驾驶的著作．但作为控制论学科，直到1940年代才为诺伯特·维纳提出和创立，从而使人们对它的认识提高到“意识”上来了，也才有此后的猛烈发展．

说起来也简单，比如对于经典的动力学模型（牛顿形式）：

$$m\ddot{x}+a\dot{x}+bx=p \tag{9.33}$$

过去只把p视为“干扰”或“强迫”，都不足以激发起人们的意识，可一旦视之为“控制”，认识便觉醒了．又如模型：

$$\dot{X}=AX+Bu \quad \text{（H-形式，与（9.33）的关系见第八章（8.4）式）} \tag{9.34}$$

亦即，当给一个线性动力系统$\dot{X}=AX$输入一个人为项u后就成为控制论模型了．其思想是何等简单！却正是它的引入使人们的认识为之一振．

控制论是个“硬”理论，它的理论和技术是相谐并进的．一方面，控制技术的发展和需求为控制理论提供了课题、财力和发展动力．反过来，正是控制理论的发展带动了整个控制工程的迅速发展．而控制理论在纯数学中则是个多学科的交汇领域，所涉及的数学工具也十分宽广．

半个多世纪以来控制论经历了四个发展阶段：20 世纪 60 年代以前是对（9.33）型模型进行研究：p 为常数时是预给控制，$p=p(t)$ 时是适时控制，同时也研究差分格式—— 离散型控制（迭代）系统. 比如，已讲到的时序分析（本章第三节、五）和将讲到的动态规划都是此期内在控制论研究中发展起来的.

20 世纪 60 年代是控制论发展的第二阶段，这时的模型进入到（9.34）型，且主要是研究线性控制系统.

20 世纪 70 年代进入了第三阶段，其特征是发展了最优控制.

20 世纪 80 年代(第四阶段)的最大特征是产生了鲁棒(robust control)控制. 以前控制理论的原则是（似乎是无意识的），把目标值视为一个几何点去控制，煞费苦心还总是不满意，然而鲁棒发现实践中没有必要向着一个"几何点"目标去提高精度、劳民伤财，常常只需按精度要求，把目标值视作一个（原几何点的）邻域，只要保证系统状态处于该邻域内，控制即属正常了. 这就是鲁棒控制的基本思想，一个新的理念. 它给控制技术带来了一次革命性的迁升.

此外，在控制论中还有几点突破，其贡献也是很大的：

（1）一个是反馈概念的提出和反馈技术的发展给"建模"带来了很大好处. 因为已有"定律"表明，反馈控制技术可以在相当大程度上弥补模型的不足. 比如图 9.7，设有一光滑动力系统，经控制后理论上应沿轨道 l 行进，但实践要求精度为 δ，则据鲁棒原理只要保证系统落在 $l\pm\delta$ 邻域内即可. 为此，我们可简单地将模型差分化，而且通过反馈去控制步长，使得只要保证这时的折线"解"落在 l 的鲁棒域里即可. 显然，若 δ 变小了，不必改变模型，只需将反馈频率提高即可.

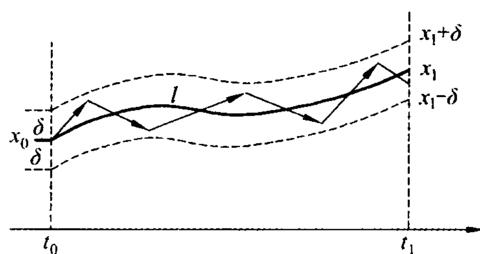


图 9.7

总之，反馈技术（亦即自适应，自学习）给建模和控制技术带了来很大好处. 特别地，仔细想来，反馈控制原理在人类生活中从来就朴素地存在着，从小孩玩的"陀螺"到骑自行车、开汽车、开机器乃至管理社会等，到处都在执行反馈控制和鲁棒控制. 这样一来，认识就上升到反馈控制意识和鲁棒控制意识了.

（2）另一个是系统辨识的理论和技术，这是控制论的又一大贡献. 它的最大

好处是能在技术上实现，通过系统的输入输出间关系来认识模型和模型中有关参数．须知在建模过程中，参数的确定也是一个十分重要的阶段，但有时容易被忽视．目前，数学建模中有三类典型的确定参数的方法，那就是建立计量模型的**统计学方法**（如**最小二乘法**）；另一个是建立数理模型的**模拟方法**；再则就是控制论的**系统辨识法**．

最后必须看到，目前控制论早已由工程技术领域扩展到了其他领域，诸如管理科学、社会科学，特别在经济学上已经有了不少研究．此外控制技术也进入混沌系统的控制．不管怎样，控制作为一种对系统的、人为的、价值论意义下的操纵，是普遍存在于大科学和社会生活中的，可信控制论还将扩展，至少其思想意识应该首先得到抽象和扩展．

2．控制论Ⅱ：动态规划

动态规划由 R.Bellman 于 1957 年正式提出，它是一种离散的寻求最优控制途径的设计理论．其模型也可表成非线性规划甚至线性规划形式，其规划特点是作**"逆序设计"**．假设过程为 n 步，则首先作出目标（第 n 步）至第 $n-1$ 步的最优设计；然后在第 $n-1$ 步设计的基础上，作出第 $n-1$ 步到第 $n-2$ 步的最优设计．如此下去直至起始状态，从而找出最优途径，也叫最优策略、最优轨道．动态规划根据的是最优化原理：**最优策略必须且只需由最优子策略组成**．意思是说，将最优途经中任一步作为初始点来看，则它以后的途径仍然是最优．

显然，动态规划的重点不在于求算法，而在于理论分析、在于建模．也就是说它比较活，首先即表现在难以确定其"状态函数"，还要求状态函满足马尔柯夫性(无"记忆"性)．为此，它正在致力于建立一种判别是否能用上动态规划的"必充条件"，并形成一类非线性泛函方程(Bellman 方程，形如 $V(x)=\max\limits_{u}\{r(x,u)+\beta V(\bar{X})\}$，符号免叙)．它经历了几十年，至今还在发展．

一般来说，动态规划方法宜用于解决一些较难的规划问题，而作为方法本身也并非易于推广．

3．控制论Ⅲ：最优控制

已经说过，动态规划是最优控制的一种特殊形式，是一种离散型最优控制．那么，这里谈谈一般的连续性最优控制问题．

最优控制问题是一种泛函求极值问题或说变分问题，其解是一种函数曲线，它就是最优解，或说最优控制过程、最优途径．

最优控制的一般模型形如：

$$
J = A(\boldsymbol{x}(t_1),t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)\mathrm{d}t, \text{ 目标泛函}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t), \ \boldsymbol{G} \text{ 为 } r \text{ 维向量} \\ \boldsymbol{x}(t) \in E^n \subset \mathbf{R}^n, \text{ 状态约束} \\ \boldsymbol{u} \in \Omega \subset \mathbf{R}^m, \text{ 控制约束} \end{cases} \tag{9.35}
$$

其中端点值 $A(\boldsymbol{x}(t_1),t_1)$ 是根据情况给定的，常常取 0 值；要求 $J \to \min$ （或 max）.

这时求连续解的方法可有两条思路，分别来自力学上不同的变分原理：

（1）拉格朗日变分原理（见“二、2”），由（9.35）的状态约束中反解出 $u(t)$ 并代入 J，再求变分 $\delta J = 0$，从而得到欧拉-拉格朗日方程：

$$
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{0} \tag{9.36}
$$

这时求出式（9.36）的解（曲线族 Φ），再据边界条件（9.35），即可求出最优轨和最优的控制变量 $u = u(t)$.

例 3 在经济学中有关于消费的“大道定理”（萨缪尔森提出），其模型为

$$
J = \int_0^T u(x_t)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}t \triangleq \int_0^T \Phi(x_t \cdot t)\mathrm{d}t \to \max
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} \dot{k}_t = F(k_t) - \lambda k_t - x_t \\ k_t \geqslant 0, x_t \geqslant 0 \end{cases} \tag{9.37}
$$

其中 $u(x_t)$ 表消费量为 $x_t = x(t)$ 的效用函数，p 为贴现因子，约束方程中 $k_t = k(t)$ 为人均投资，$F(k_t)$ 为人均产量，视 x_t 为控制参数，则将（9.37）状态约束中反解出 x_t 代入目标函数 J 中，有

$$
\Phi = \Phi(k_t, \dot{k}_t, t) = u[F(k_t) - \lambda k_t - \dot{k}]\mathrm{e}^{-pt}
$$

再求 $\delta J = 0$ 得到欧拉-拉格朗日方程：

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial k_t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{k}_t} = 0 \tag{9.38}
$$

其中

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{k}_t} = -u'\mathrm{e}^{-pt} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial k_t} = -u'[F' - \lambda]\mathrm{e}^{-pt} \\ \dot{x}_t = F'\dot{k}_t - \lambda \dot{k}_t - \ddot{k}_t \end{cases} \tag{9.39}
$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{k}_t}\right] = -u''\dot{x}_t \mathrm{e}^{-pt} + pu'\mathrm{e}^{-pt} \tag{9.40}$$

从而式（9.38）成为

$$\dot{x} = \frac{-u'}{u''}[F' - (\lambda + p)] \tag{9.41}$$

若能解出式（9.41）则问题即可解决，但求出式（9.41）的解析解并不容易，这才产生了有名的“大道定理”等一系列理论研究和成果．

（2）哈密顿变分原理（见“二、3”）．哈氏力学是现代力学的基本形式，而哈氏变分原理也成为现代变分原理的一般形式，所以也是现代最优控制的基本形式．其特点是在模型（9.35）的基础上十分容易地构造出一个哈密顿函数

$$H = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda} G(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{9.42}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r$，叫做**协态变量**．$H$-函数的思想类似于构造拉格朗日函数，这是因为哈氏对牛顿力学作出的变换 $H = T + V$ 带来的方便（拉氏变换 $L = T - V$ 却没有这一方便，对 H-函数的直观（空间）理解也可借用于对熟知的条件极值中拉氏函数的理解）．有了简单的 H-函数构造就有了简单的 H-变分原理：哈密顿方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \end{cases} \tag{9.43}$$

显然方程组（9.43）的第一方程即（9.35）中的控制约束，第二方程叫做协态方程．一般地，式（9.35）中 Ω 常常为无穷空间，这时须再加上方程

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathbf{0} \tag{9.44}$$

则联立式（9.43）、式（9.44），再据式（9.35）中边界条件 $\boldsymbol{x}(t) \in E^n$ 以确定积分常数，即可得解．

例 4 某钢铁生产最优控制问题，模型为

$$\begin{aligned} & J(x,u) = -\int_0^{t_1} (1 - u(t)) x(t) \mathrm{d}t \to \min \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \dot{x} = u(t)x(t), \ x(0) = c, \ x \geqslant 0 \\ u(t) \in \Omega = [0,1] \end{cases} \end{aligned} \tag{9.45}$$

其中 $x(t)$ 表示产量增长率，u 为控制变量.

为求其解，先构造 H -函数:

$$H = H(x,u,\lambda,t) = -(1-u)x + \lambda ux$$

从而有哈密顿方程组:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = (1-u) - \lambda u \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = ux \end{cases}$$

但这时由于 Ω 有限，最优点不一定在 Ω 内，所以不能再用式（9.44)，经分析创造性地代之以不等式关系:

$$(-1+\lambda^*)x^*u^* \geqslant (-1+\lambda^*)x^*u, \quad u \in [0,1]$$

其中 (x^*,λ^*,u^*) 为假设的最优解，再经适当讨论最后可得最优解为

$$x^*(t) = Ce^t, \quad u^*(t) = 1, \quad \lambda^*(t) > 1, \quad t \in [0, t_1 - 1]$$

第七节　均衡与和谐系统论

一、小　序

“均衡（equilibrium)”概念，从科学理论到生活实践都十分基本，被引申成了多种术语. 基本意义来自（物理学)“质点”所受合力为 0 的状态（或指“向量场”中的迷向点). 引申到社会系统，尽管所有元素总处在非均衡运动状态，但是“均衡”理论才是它的核心.

因此“均衡”理论在数学中受到特别而广泛的重视是必然的. 从等式的含义、代数式求解的含义到动力系统中奇点理论、突变理论，再到泛函的 M. Morse 理论（第五节、二 4)，再到优化理论等，无不充满着“均衡”理论及其思想.

总的说来，均衡概念及其发展层次可归为如下两类情形.

(1) 第一类，从系统在其均衡点邻域的运动轨道特征来分:

在“第五节、二 4”谈到的基础上，这里只需代表性地简述一下从动力系统角度作出的分类. 这时主要有四种所谓“初等型”均衡点:

- 中心型——绕着均衡点的一族闭轨线.
- 焦点型——轨线族是绕均衡点的螺旋线，方向向着均衡点者为稳定型，否

则叫不稳定型.

• 结点型——轨线族直接进（出）均衡点者，进者为稳定型，出者为不稳定型.

• 鞍点型——轨线族中有一对进入均衡点，一对自均衡点远离，其他所有轨线皆流近均衡点后又离开去，形成“马鞍”状.

• 综合型——高级均衡点，系多个初等均衡点汇聚而成.

（2）第二类，从均衡点集的功能特征来分：

这是以社会系统为背景对应到数学中得到的一个多层次的“均衡”概念.这时可分为代数的、函数的、有约束的、多目标多约束的、均衡增长的等类型（或叫层次）.

本节将着重讨论“第二类”（从均衡点集的功能特征），将以社会系统为背景，用“数学思维”对5种（也是5个层次的）均衡作一简单描述.在数学上尚不成熟，但相信这是值得研究的应用方向，提出来与读者共飨.

以下设社会系统为S，有元素（成员）集

$$\{x_i\}_{i=1}^{n} = X \tag{9.46}$$

在不致混淆时，元素也可表示相应的量或函数等.当提到x_i，即指X中的一元.

二、代数均衡

代数均衡又叫初等均衡，简称平等、均等.它直接对应着“合力为0”的情形，表现为（会计的）收支借贷、资源配置上账目平衡等.系指（实象中）实在的、物质的均衡类型，可记为

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a \tag{9.47}$$

式（9.47）表示各元素面对共同的物质A，直接所得数量皆相等且等于a，不过这不是常有的事.

因为社会上每个人除了人权是平等的以外，诸如能力、贡献和各自的企求等都是非平等的，但社会要追求平等，这就造成复杂性了.

三、函数均衡

函数均衡是一种非初等均衡，属于心理上的满足问题，系精神空间层次上的均衡，又叫最优.对个人来讲系指效用、效益、功能之类函数的均衡问题；对社

会系统来讲系指市场效率、社会保障、环境保护之类函数的均衡问题．它们皆表现为相应的非线性函数的导数等于 0 的情形．

具体说这时面对 A，元素 X 中各自会有所反映，因此视各元素为 A 的函数．如图 9.8 示意，要在函数意义下来满足（9.47）式，即要要求各曲线交于同一点，这是不容易的（即使相交，其交点已不是式（9.47）中 a 的含义了）．

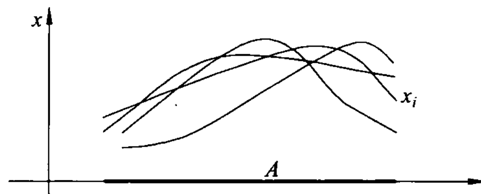


图 9.8

再结合实际来看，仅据经济学已能得知，对于利益 A 各自都有个自己的“效用函数”，且都有要求其效用最优（导数为 0）的企求，这时各自的量更是不等的，且总量甚至会超出 A．

那么，实践中人们是怎样获得均衡的呢？总体思想是提高一个层次来看问题，即首先（设已）给出系统（在有关方面）建立在元素 X 上的（设为）功能函数，记为

$$W = F(X)$$

并求出 W 最优时（W 为常数，右端函数的偏导向量为 0）各个元素的值（实则各元素的贡献值），再按此比例来分配 A 则是公平的了，因而能得到均衡．

换句话说，就是要求方程

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.48}$$

的解．这是个 n 阶方程组，一般是非线性的，不能保证有解．不过这时还可增加一个方程（又叫约束）

$$\sum x_i = A$$

这样会增强可解性．但在具体实践中主要困难还在于，其中的功能函数 F 需要具体去建立．

附：顺便解释一下函数“均衡点”与动力系统中“奇点”的关系．

求出功能函数 $W=F(X)$ 在非均衡点（叫常点，这时 W 非常数）的各偏导函数：

$$\frac{\partial W}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{9.49}$$

再用其中 $i=1$ 式通除以 $i=2,\cdots,n$ 各式，得

$$\frac{\partial W/\partial x_1}{\partial W/\partial x_i}=\frac{\partial x_i}{\partial x_1}=\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/x_i}\quad(i=2,\cdots,n)\tag{9.50}$$

注意到偏导符号不是本质的，仿本章式（9.3）法可有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_1}=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_1}=\frac{\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t}=\frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_1}=\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial x_i}\quad(i=2,\cdots,n)\tag{9.51}$$

若能求出并将（9.51）式中各分母变成它们的公倍数（记为 φ_1），相应分子记为 φ_i，则有方程组

$$\frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_1}=\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\quad(i=2,\cdots,n)$$

从而整理成正规动力系统形式：

$$\dot{x}_i=\varphi_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{9.52}$$

这时动力系统的均衡点（奇点），即式（9.52）右端函数同时等于 0 的方程组的解集．实质上就是式（9.51）中各偏导同时等于 0 的解．

原来一个动力系统是由其更高层次（比如功能）函数生成的，它的奇点就是该“功能函数”的均衡点，它的轨道也会通向其“均衡点”．这个功能函数就是该动力系统的所谓“积分函数”．

注：这里看到了，对于同样建立在 X 域（n 维立方体）上的 $F(X)$，当把它看做函数时，可直接对其作“分析”；当对其引入时间变量时，可作动力系统“分析”；特别地，由于 $F(X)$ 也是个建立在 n 维立方体 X 之上的“超曲面”几何体（属一般流形），因此当把它看做几何对象时，则可在其上作（属于现代几何学的）几何“分析”．可见“第一节、三”中说的“分析数学”之“数”、“动”、“形”三大特征，原则上可在同一个对象上表现出来．

还看到，动力系统研究的重心只是（测度为 0 的）奇点集及其邻域作为全测度的常点集仅附属于奇点分析的结论．恰好，这点与社会系统的重心是均衡（平等、公平等）且互相对应，并非偶然．又，动力系统的突变对应着社会系统的应急事件，这些都说明社会活动具有动力系统的自然实质．

四、Pareto 均衡

这是针对群众心理的一种“多目标、多约束”函数均衡．实际上，一个最优系统常常要求满足多个目标函数，比如“二”中的功能函数不只是一种目标函数，还可能有系统效率、效能、环保、社会贡献之类函数，所以说多目标问题是常有的．至于其约束“方程”，本质上（在拉格朗日意义或哈密尔顿意义下）也是目标“函数”．因此现在仅对“多目标”情形来讨论均衡．

上段已经看到，求一般单目标下的均衡已较困难（主要是没有建立目标函数的规范模式），对于多目标情形更是如此（多目标概念见第六节、三）．其困难一方面是需要独立创建多个足够精确的（一般是）非线性目标函数，常常难以满足实践需要．更重要的是多目标函数间常常出现“不相容”性，比如既要效率又要公平即是“两难”的．再说，“系统总体最优不等于各局部皆优”，所以难以实现多目标下的最优．

克服困难的方法之一，(其思想）是将问题再升华一步，建立更高一级的泛函，再求出使其变分为 0 的解空间即可．但仍然涉及建立该类泛函之难．

这里介绍另一个既有的有效方法，它属于“p-均衡理论”．

这是新福利经济学代表人物 Pareto 于 20 世纪 30 年代提出的．他的创造性在于，面对传统多目标问题的困难，另辟蹊径地想到“退一步天地宽”—— 提出了一个“次最优”（或次均衡）概念．其思想是，既然同时满足对各元素的偏导为 0 难（多个目标函数同时达到顶点难），那就退一步在各自顶点附近去找个“次最优”（偏导近于 0 的状态）是可行的，且这种状态还是非唯一的．

定义 9.2（p-均衡）　对于可行域 Ω（如群众集）上多目标函数集

$$u(x)=\{u_i(x)\}_{i=1}^{l}$$

若有 $x^*\in\Omega$，满足 $\exists y\in\Omega$，使得对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,l\}$ 皆有

$$u_i(y)\geqslant u_i(x^*)\text{且“}>\text{”必产生}$$

则叫在 x^* 达到 p-均衡，x^* 叫做 $u(x)$ 的 p-均衡点，又叫 p-最优点．

易知，这时的 p-均衡点 x^* 非唯一，且这样的均衡点集构成所谓 p-流形．它是囿于系统完全空间的一个（子）空间，即系统（各目标）均衡点邻域之并集，一般是高维的．p-流形的一个有名的特例，即“埃奇沃兹箱”(一般的可参见“p-最优与 p-最优配置”，系统工程，1995 (5))，即使在“埃奇沃兹箱”中，其 p-流形也是个一维轨迹“合同曲线”．

显然，关于经济系统的 p-最优理论完全可以推广至社会系统，仅仅是具体的

范畴、资源、目标、约束、因素等类考察复杂一些罢了. 以下则直接认为 p-最优、p-流形是针对社会系统的.

关于 p-流形的研究不管从理论上还是应用上都是优化理论、均衡理论，特别是数理经济中一个重要的研究领域.

p-均衡概念还可叙述为“任有一个元素的‘效用’值增加[1]，都将有其他元素的效用值被减少”，因此它最接近于现实、易于操作. 比如一个企业中，多作贡献者获高效益了并不影响他人（大家认同），然而少作贡献者获高效益了即会影响到他人心理而产生不平衡.

五、均衡增长

1．一般的均衡增长

这是一种动态均衡、持续均衡，本质上是一种“泛函均衡”，即如本章式 (9.35)，设其控制量为常数，其目标是个泛函，约束式含（增长性）动力系统，其解是个更高层泛函（H-函数）的变分方程的解，它是个时-空空间上的增长轨线. 对应到社会系统，即群体心理在持续均衡下的发展过程.

显然，从理论上说这是最正规的分析途径，但是它同样遇到“三”段所述在实践上的困难，因此这里仍需要“另辟蹊径”.

那么，继续借助 p-均衡的优点，自然不失为一种途径. 那就是:

2．广义的均衡增长：p_t-均衡

进一步说，若将上述“时-空”意义下，轨线的“空”（一般为空间中的点）广义化为 p-流形（“时”不变），则成为系统整体（状态）保持其 p-均衡的时序增长过程了. 把这样的系统均衡状态叫做“时序 p-均衡”，记为 p_t-均衡，亦即其均衡状态是随时间而不同的，且要求它是增长的.

对于这样的问题，据本章第三节系统状态的时序性讨论，难于建立起（由一般函数表出的）“典型模型”来，因此宜于建立（非一般函数表出的）“象征性模型”且宜于建立离散的迭代模型（有待具体深入）. 比如，还可把目标函数的空间形式划分为均衡点、均衡点邻域、远离均衡态、危机状态等依次包含的四个部分，以讨论如何才能保证系统处在前两种状态，在第三种状态如何预警，第四种状态如何挽救等.

---

① 这里应注意到它是一种心理量增加，而非初等的配置量增加.

六、和谐系统

定义 9.3（和谐系统） 把系统的“p_t-均衡”状态叫做系统和谐，又叫“和谐系统”. 亦即，系统和谐只是系统“持续均衡发展”概念的更富生活性、实践性的一种说法.

因为“时间具有积分功能”，如果系统有了不和谐因素，诸如发展中对环境污染的忽视或决策中对某些“不起眼”因素的忽视等，即会产生负的“进步量”，那么经时间积累（量变）常常可能酿成质变. 因此说系统如果不能保持 p_t-均衡就是不可持续的系统.

显然，在上述思想准备下，以社会为背景用数理工具对“和谐系统”作研究，应该是一个大有前途的应用领域. 这里既有很强的实际需求、实际背景和实际意义，又可以用上广泛的（特别是现代的）数学工具，更是大有创造、创新的驰骋空间.

第十章　数学按其空间形式的发展

数学的一个流行定义是"数与形结合的科学"，注意到其中"结合"二字的含义，不可把数学各分支看成要么属于"数"的研究，要么属于"形"的研究．当然也不是每门学科中都是数与形的平均结构，往往是或者偏重于"数"，或者偏重于"形"．这里当强调，即使重"数"的分支，比如分析学也有它的形作为思维背景．所谓"形"，一指形体、形象或图形，一指空间．前者是后者（空间）中的具体对象，后者是前者的背景和参考，总的都叫做空间形式．

由此看来，对空间形式的认识也是整个数学的需要，按其空间形式的发展也从一个大的方面体现了整个数学的特征，而且是个根本性特征．这也说明了本章的重要性．

第一节　点式数学

一、1619 年前：线段数学

在 1619 年诞生笛卡儿坐标概念之前的几千年历史中，整个数学处于初等数学时期，其特点是：

1．数学三基

算术、几何、三角学是当时数学的三门基础学科，也是最高级学科．当时的算术，包括"文字代数"和初等数论的早期问题，最多只有"六则"运算：加、减、乘、除、乘方、开方．因当时刚发明对数（1613 年），还说不上有成熟的对数运算．至于指数运算，也属于函数问题，还没有产生．所以当时只有"六则"运算，而不是"八则"运算．

当时的几何主要是平面几何，是对点、线段、圆、三角形等对象的研究．

至于三角学，实则平面几何中三角形的各种角所引出的度量特征与规律研究．

2．线段数学

根据毕达哥拉斯的熟知"故事"，当时的数（属有理数 $\mathbf{R}_r$）除了整数可以来

自对单个个体的数（shǔ）数外，一般的数包括小数都来自线段的度量实践，所以可把**算术**中的数视作由**线段度量**而来.

又，容易看出，三角学、几何学实际上都是直接对线段的研究. 比如，有关三角形的理论自然如此，对圆的研究也在于弦、弧、直径、半径、圆周与角的研究，前四者皆为线段的，对圆周的研究也是用直径对它作“度量”. 至于角的研究，与三角学相同，而三角函数都是用线段的比值关系来定义的，所以，初等的**三角学**和**几何学**都是直接**研究线段**的数学.

归结起来即可说，“三基”数学都是建立在**线段度量**基础上的. 特别还囿于当时的“度量”水平，仅体现为对线段认识的古典特征（除知道少数“无理”的数以外，就只有在有限的有理数上作运算），否则就成为坐标意义或说基数意义的了. 换句话说，1619 年前的古典数学基本上是建立在线段度量实践基础上的，把它叫做**线段数学**.

可以想象，当时由于没有坐标系，人们脑子里的数概念只能与**线段**及其**度量活动**相联系，这就不难理解毕达哥拉斯会犯有理数错误了.

3. 线段数学与点式数学

所谓**点式数学**是从今天坐标系（实轴）上的特征，亦即空间特征来说的. 因为“线段数学”中的数都是离散的、静态的、一个一个的数，分布在实轴上就是点式的、没有数的邻域概念，更没有稠密性、连续统概念，所以线段数学属于点式数学.

但反之不然. “点式数学”含义更广，包括一切以数值为特征而不强求数集的稠密性、连续性、区间性、凝聚性的全部数学内容，因此点式数学也是今天数学的一大成分.

二、1619 年后的点式数学

如上所述，所谓“点式数学”，只是相对于它的数在实轴上的空间分布特征而言，每一个数在实轴上皆有一个且只有一个几何“点”对应着它. 离开这一空间特征来说，就是通常说的数值数学或初等数学. 进一步说，在近现代来看点式数学的特点是:

（1）点式数学是初级数学，因而，如今点式数学仍然分布在社会生活的基层，包括现代的文盲在内，人人都能使用的“数学”即属点式数学.

（2）点式数学用到的数值都是有理数，而且只是有理数集 $\mathbf{R}_r$ 的子集，在这里即使无理数也成为有理数了（有限小数近似）.

(3) 度量数学也是点式数学．度量学是科学技术中一门十分重要的学科类，主要体现为度量技术的需求与发展，它在每个时代都是站在技术前沿的，具有确定数学的特征．从“一、2”亦知，点式数学本来即具有度量实质．度量学除了它的理论，比如误差理论涉及更广的数学外，它得到的数都是点式的数值，且仍然只能是 $\mathbf{R}_r$ 中一个很小的子集．

(4) 社会统计学，以及财会学、审计学等皆属点式数学．

(5) 点式数学具有数值性数学的基本特征．不仅如此，如今同样进入现代化的，能与其他优美数学媲美的，并且同样发展很快的数学类，诸如计算数学、数值逼近、离散数学、信息数学、有限元数学乃至初等数论、组合数学、价值数学等，它们都以数值作为其特征之一，甚至是主要特征，因而说点式数学也包括数值数学．

汇总起来可看出，点式数学在今天甚至今后，都将是社会生活、科学技术乃至数学本身的一个基本内容．

第二节　邻域数学

一、笛卡儿坐标概念引起的函数论与分析学

当年笛卡儿在发明解析几何学时引入了**坐标系**和**数轴**，尽管当时还讲得不太清晰，但已大大地启发了后人，从而形成了完美的坐标系概念和方法体系，并在数学上迅速发展成庞大的函数论与分析学领域．

笛卡儿用具有**固定夹角**的不同**数轴**构成了笛卡儿坐标系．从此，在笛氏坐标系中，数量变“活”了，成了**变量**，而因变量和自变量间的函数关系也变得十分直观了．同时，变量的变化范围、变化过程、变化方式也变得更清晰了，在人们脑子里不再只是一个点一个点的数，而是具有连续性、光滑性的“活”的数了，从而激起了人们对函数研究的广泛兴趣，函数的研究已不仅仅局限于一些规则的曲线了．

换句话说，笛氏坐标为一般函数的深入研究提供了一个很好的形式．这是因为(统计表明)，人们的思维形式大多数是空间的、几何的，少数人是代数的、离散的，因此有了坐标系这样定量表述的空间形式，将更有利于人们发挥他们的思维特征．这也是笛氏坐标系为什么能在数学中产生如此大共鸣的“思维学”基础．

特别地，在笛氏的初步思想发表后不久即被天才的莱布尼茨理解，并得到了发挥，更进一步与牛顿同期创造出了微积分学．从此以微积分学为核心的**分析学**

的发展，成为数学中的主流（见第九章第一节），这不能不说是与笛氏坐标的功劳分不开的.

那么，为什么在笛氏坐标系中原来的点式数能变"活"？这里的关键是任一个数皆有了仍然属于数轴的**邻域**．正是邻域族的彼此交叠、关联，形成了一个数的统一体（连续统），使得数在其上能变活．这就是数轴给实数集带来的**邻域结构**特征，从而也开辟了对函数值的邻域性和"活"性认识．比如，如果没有邻域结构观，则很难想象极限概念、微分概念、聚点概念等能建立起来．所以说函数论、分析学是直接借助了"邻域"这一生机.

特别地，人们无不体会到，函数和分析学的情形十分复杂、细腻．比如除了"病态"数学外，还有种种发散性、奇异性现象，以致让人们很难直观理解（例见《分析中的反例》，高枚译），这种现象也是至今数学中没有哪一个分支能与之匹敌的．那么这是为什么？我们说除了**无穷形式**的"作用"和**函数构造**上的易于操作外，定义域上复杂的**组合结构**和**邻域结构**特征也是一个重要因素．比如，稠密点集、稀疏点集、聚点、开闭集、邻域集再结合函数的各种奇异点集、序列点集等，可有无穷无尽的组合情形，使得我们在分析学上任何时候都不得不小心谨慎，防止想象不到的弊漏．的确，对于数的"邻域结构"认识应该是数学在空间形式上继"点式数"认识之后的又一个新的层次、新的深入．在这个层次上，已有了丰富的数学内容，并且它们还在沿着两个方向继续深入和发展：一方面是向着微观的深入，表现在实轴的连续统结构认识（第六章第一节以及十一章的"无穷小认识"）上[①]；另一方面是向着宏观空间、广义空间的发展，此即本章第四节"空间数学"所要谈的．现在继续对邻域数学作如下讨论.

二、坐标概念的推广

1．直角坐标与斜坐标

如今定义**笛卡儿坐标系**为**直角坐标系**，但笛卡儿最初的坐标概念中仅说坐标轴间具有"固定角"，这说明它最初的概念只是如今说的"斜坐标"．从坐标的创造性思维过程来说，首先想到这种一般情形，是自然的．但从直观性讲容易发现，一般的斜坐标并不方便，比如图 10.1 中斜坐标下的正方形反倒成了平行四边形．不过斜坐标在仿射几何学中却十分得力，所以又叫**斜坐标系**为**仿射坐标系**．这是因为，比如即使经过一个简单的线性变换：

① 此外，据"二象论"，今天对邻域的认识仍需深入，应该考虑有理点的二象结构，其虚象即是它的一种邻域.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{2\times 2} \tag{10.1}$$

也会使直角系变成一般的斜坐标系，如图 10.2 所示．对于式（10.1）中一个一般的常数矩阵 A，都会使得比如原来的正方形变成菱形或一般平行四边形，甚至若式（10.1）中 A 为非常数矩阵，即成为非线性变换，将产生“曲线坐标”情形．

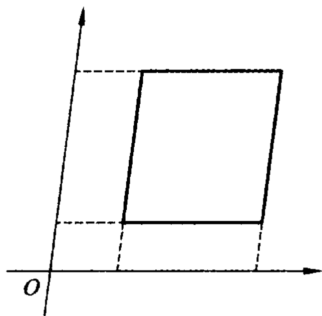


图 10.1

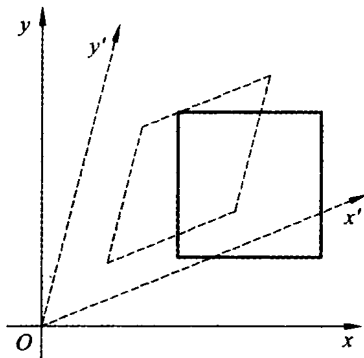


图 10.2

事实上，容易领悟到，不管是斜交的还是直交的，只要是线性无关的“直线组”皆可形成一个坐标系或说形成一个空间．在这一意义下，直交、斜交都不是本质的了．这对于线性代数方程组解空间的认识，线性空间的线性变换认识，以及线性空间具有非唯一基等的理解，都是有意义的（其实这也是仿射几何思想），所以我们应该认识斜坐标系．

2．极坐标、球坐标、柱坐标

学过高等数学的人对这三种坐标是十分熟悉的，不必多说．应该看到，不管是什么坐标系，它的坐标变元个数应与所表空间的维数相同，且变元之间是线性无关的．同时还应看到每个坐标系都定量地决定着一个空间，因而这个空间里的一切对象都可由它定量地表出．但一个坐标系无非一个空间中参考“标架”罢了，所以同一个空间，其参考“标架”（坐标系）并非唯一，且彼此可以“转换”．所以同一空间内的同一对象，在不同坐标系下，有着不同的表述形式，这些不同的表述形式之间是可以转换的．

尽管如此，同一对象在不同坐标系下的表述形式之间存在着繁简和难易的差别，特别还存在数学运算处理上的难易差别，这是大家都有的经验了．由此说明，我们在解决数学问题时，既要充分遵守坐标系的规律，也要充分利用它的规律．

比如对于不同的数学问题，即应选择甚至创立更为合适的坐标系，并将模型

转换到新系再进行演算．这就是数学中可能存在多种坐标系的原理，也是我们能够进行适时选用（坐标变换）的原理，当然更有“人人皆可创造新坐标系”的原理．

正出于这点，目前，数学中各种各样的坐标概念不下一百种（见《数学百科辞典》），当然有些是仅具有特殊用处的坐标而非坐标系．下面仅就常用概念再谈一点．

3．广义坐标与局部坐标

前者是力学界广为使用的一种坐标，它是当年拉格朗日创立拉氏力学时提出的，记以

$$q_j,\quad j=1,2,\cdots,r$$

$\{q_j\}$表示一个力学系统的位置，其中r表示系统的自由度．可见在广义坐标中的都是独立变量，且实际意义鲜明，后来哈密顿又提出广义动量

$$p_j \triangleq \partial T/\partial \dot{q}_j \quad (T\text{表系统的动能})$$

因此也把(p_j,q_j)统称做“广义坐标”．

所谓局部坐标正是典型地体现了本节邻域数学特征的坐标系．把建立在邻域（小的开集）上的平直空间坐标系叫做“局部坐标”，它广泛地用于弯空间（流形）上的种种数学，因而该概念在现代数学中很有用．

三、点的邻域性质认识

设$x\in\mathbf{R}^n$，x在$\mathbf{R}^n$中的δ邻域（记为$N(x,\delta)$）界定为：$\mathbf{R}^n$中以x为中心的δ球形邻域．当未具体指明时，一个一般的$N(x,\delta)$为开域，且其中δ若未具体给定，系指一个较小的参变量，可为任意小，但不取无穷小．特别地有$\mathring{N}(x,\delta)=N(x,\delta)\setminus\{x\}$，叫做（$\mathbf{R}^n$中）$x$的空心邻域．

（1）邻域是集合．因此若$x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$，则相应的$N(x_1,\delta_1)$与$N(x_2,\delta_2)$之间存在一般集合的$\cup$、$\cap$运算，同时其交

$$N(x_1,\delta_1)\cap N(x_2,\delta_2)=\varnothing\quad(\text{或}\neq\varnothing)$$

（2）邻域可以是低维的．比如记

$$N^r(x,\delta),\quad r<n$$

表示x在$\mathbf{R}^n$中的r维子空间上的邻域．

（3）邻域可以成族．比如可记为

$$N(x)=\{N^r(x,\delta)\,|\,\delta\in\mathbf{R},r\in\{1,2,\cdots,n\}\}$$

或

$$N(x)=\{N(x,\delta_r)\,|\,r\in\{1,2,\cdots,n\},\delta\in\mathbf{R}\}$$

（4）设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$为有界集，则可找到$\Omega$上元素子集$\{x_i\}$，使其邻域族$\{N(x_i)\}$能覆盖$\Omega$：

$$\bigcup_i N(x_i)\supset\Omega$$

特别当Ω为闭集时，只须有限个（开）邻域$\{N(x_i,\delta_i)\}_1^m$即可覆盖Ω：

$$\bigcup_{i=1}^m N(x_i,\delta_i)\supset\Omega$$

这就是有名的“有限开覆盖”定理．

换句话说，邻域可以互相交叠形成连续统空间．

（5）$\Omega\subset\mathbf{R}^n$可为有限点集，这时$\forall x\in\Omega$的邻域可根据具体情况来定义．比如，设多面体顶点集为Ω，则对于任一顶点，与之共边的顶点之集就是其一种邻域.

（6）从意识上讲，对于点x，其纯（空心）邻域$N(x,\delta)$可看成一个非点的空间，因而点x与其$\mathring{N}(x,\delta)$之间可看做“二象”结构关系．这点认识在“四”中将有应用．

（7）邻域具有伸缩性．比如，取非平凡的映射$f\in C^0(\mathbf{R}^n)$，则f对$N(x,\delta)\subset\mathbf{R}^n$的作用成为

$$f(N(x,\delta))\triangleq N(x,\tilde{\delta})$$

这时$\tilde{\delta}$不一定为定数，亦即$N(x,\tilde{\delta})$不一定是球形邻域了．

（8）$N(x,\delta)$中当δ不为无穷小时，若$N(x,\delta)\subset\mathbf{R}^n$，由于$\mathbf{R}^n$可度量，$N(x,\delta)$也是可度量的，即有度量映射$\rho:N(x,\delta)\times N(x,\delta)\to\mathbf{R}^1$，满足：

$$\rho(x_1,x_2)\geqslant 0,\ x_1,x_2\in N(x,\delta)\quad(\text{“=”号仅当}x_1=x_2\text{时实现})$$

$$\rho(x_1,x_2)=\rho(x_2,x_1)$$

$$\rho(x_1,x_3)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)$$

但当δ为无穷小时即不再满足，这属于第十一章的情形．

四、典型的邻域数学Ⅰ：点集拓扑及拓扑学简述

已经多次提到，拓扑结构是数学的三大基本结构之一，其实拓扑结构的基础就是邻域结构．典型的邻域数学首先是**点集拓扑学**，其次是（建立在基于邻域结构的函数论之上的）**微分拓扑学**，但为了“拓扑”上的全面性，这里也顺便谈谈**代数拓扑学**．

1．点集拓扑学

点集拓扑学又叫一般拓扑学，通常简称拓扑学，它源于康托尔集合论引入的点的邻域类有关概念的研究．对于拓扑学，在第二章第三节已作过定义，第三章第三节也谈到过，这里作为进一步地提及，主要是在“二”中的邻域特征基础上再来认识一下点集拓扑学．首先，在拓扑学中用到的邻域不是个别点的邻域，而是一般点的邻域，所以换个说法，一般地将它叫做**开集**．亦即，对于开集 X，其拓扑 $\tau=\{X$ 中子开集族$\}$．

所谓 X 成为拓扑空间是说在 X 中定义的 τ 满足“拓扑结构”，即满足如下公理：

(i)　$X,\varnothing\in\tau$；

(ii)　$\forall\tau_1,\tau_2\in\tau,\tau_1\cap\tau_2\in\tau$（有限交）；　　(10.2)

(iii)　$\forall\{\tau_i\}_1^\infty\subset\tau,\bigcup_{i=1}^{\infty}\tau_i\in\tau$　（无限并）．

反过来说，满足式（10.2）公理组的 τ 叫做 X 的一个拓扑集，从而说“在 τ 结构下 X 成为一个拓扑空间，记为（X,τ）”

这里说明几个问题：

(1) 在同一个 X 中，可能构造出不同的满足式（10.2）的拓扑结构（记为 τ'），使得（X,τ'）成为不同的拓扑空间．比如，$\tau=\{X,\varnothing\}$ 就是个（粗）拓扑，由此可见，上述拓扑定义即使对同一个 X，也是个非常宽松的概念．

(2) 在上述定义下，对于 X 的集合性要求更是宽松的，其中 X 可以是离散点集（注意到一切有限点集的开闭性是中性的），可以是欧氏空间，也可以是函数空间甚至于实物集合、社会空间等．

(3) 定义式（10.2）中仅给 τ 以一种加、乘基本运算的封闭性要求，并未赋予任何代数结构限制（既不要求运算可逆，也不要求一定的运算定律），因而最容易满足．这是该定义表现出的又一个宽松之处．比如，据代数学知识完全可以在(ii)、(iii)基础上赋以多种代数结构，使拓扑定义仍然满足．这就说明了，意义广泛的拓扑空间很容易与客观世界广泛存在的“代数结构”共同形成所谓“复合空间”．

实际上，比如泛函分析中常用的度量空间、赋范空间、Banach 空间、Hilbert 空间等都是“复合空间”，它们具有更多的数学内容，可见这里拓扑概念的广泛性也起了很大作用.

其实，现代拓扑学研究的空间常常是“复合空间”，它与泛函空间、代数结构是紧密相连的，包括拓扑学的引申. 如第九章谈及的格上拓扑和模糊拓扑学等，也都具有这一“复合”特征.

(4) 拓扑学的基本任务是利用开闭集、聚点、序列、敛散性概念和交并运算等来研究拓扑空间之间的连续映射（拓扑变换）的不变性，定义式（10.2）反映的正是在满足了这些基本任务的（起码需求下的）本质特征. 其条件的宽松性是它成功的又一表现.

(5) 在定义式（10.2）中之所以要求有限交（ii）、无限并（iii），是因为无限个开集之交可产生闭集，不满足 τ 的开集性. 比如，任一闭集 $l\in\mathbf{R}^n$，就是它的全部邻域族（无穷个开集）的交；但无限开集之（无限）并仍为开集，仍属于 τ. 总之，条件（ii）、(iii) 是为了在保证定义式（10.2）中纯粹的开集性之下，让定义尽量宽松，所满足的范畴尽量宽. 当其能满足无限并时则赋以无限并.

也许初次接触定义式（10.2），会觉得点集拓扑的定义来得太抽象，有点故弄玄虚，让人摸不着顶，那么现在由（1）、(2) 可看到，正是这样的抽象定义，使之有了十分广泛的背景，以致人们公认，“在此定义下，要建立一个拓扑空间常常是容易的”. 可以说式（10.2）正好充分地反映出整个数学领域中拓扑结构的基本性与普遍性，因此它是成功的.

(6) 点集拓扑中的不变性. 数学中少不了变换，数学的一个总的任务就是研究各种变换下相应的不变性或不变量. 拓扑学研究的是拓扑变换（拓扑空间上的连续映射）. 在点集拓扑变换下，不变性主要有**度量性**的不变性和**连通性**的不变性两种. 前者系指“三、8”意义下的可度量性不变，而不是度量值的不变. 反过来说拓扑变换正是度量值（长度、距离、体积等）的改变，因为它原本就叫“橡皮几何”. 总之，这里说的度量性是指保持度量特征（即非负性、对称性、三角不等式性等度量三公理），而不是度量值不变. 至于连通性的不变，意即拓扑空间上的“洞”经拓扑映射后不增不减，进而可知空间维数也不变.

此外必须谈到，拓扑学可从以下两个方面作为一种“定性的”思维认识工具：一方面是作拓扑类的“归纳性”思维，另一方面是其拓扑类意义下的“可变性”思维. 比如，电路设计上的拓扑变换；架线工需要有点拓扑思维；一切 Jordan 曲线（中途无交的闭曲线）与圆、椭圆皆属同一拓扑类等认识即属此.

2．组合拓扑学

组合拓扑学，简称组合拓扑，源于 18 世纪欧拉对多边形进行的三角剖分和对

多面体的顶、边、面的研究．19 世纪末庞加莱进一步对多面体进行单形[①]剖分，而提出了**单纯复合形**（简称复形）概念，从而产生了一系列的进一步概念和深入的理论问题，宣告了**组合拓扑学**的诞生．

顾名思义，组合拓扑旨在研究“复形”这样的几何对象上产生的各种**单形**及单形的**方向、边沿**等的组合形式．特别是单形的各种**边沿链**之间的“运算”关系，形成了**链群**，再进一步产生了**同调群**．扭结理论也属组合拓扑学．组合拓扑学得到的不变量（性）有诸如环挠数、Bit 数、示性数、映射度、Hopf 不变量、不动点之类．

3．代数拓扑学

代数拓扑学，简称代数拓扑，是组合拓扑中同调群研究的继续深入而形成的，从 20 世纪初开始到其四五十年代最盛．它的主要特征是将组合拓扑对象“多面体”推广到无穷面体，亦即一般（多维）球面乃至一般的紧空间（泛函领域）．代数拓扑的主体内容叫做**同调论**．

同调论的主要内容是上同调理论，如上同调群、上同调环等．不过同调论在 20 世纪四五十年代兴旺一时之后有所降温，被视为“昙花一现”的理论，往后则让位于**同伦论**．

同伦概念见第三章第四节，此外诸如代数 K-理论（在微分流形的向量丛上析出等价类后再构造 K 群的研究）、谱序列分析等也都是代数拓扑的研究方向．

既然代数拓扑学可说是组合拓扑学的继续，那么其不变量（性）研究基本上可以说也是组合拓扑学不变量（性）研究的继续．

4．微分拓扑学

微分拓扑产生于研究“庞加莱猜想”[②]的深入，即广义庞加莱猜想：“如果 n 维流形 M^n 与 n 维球 S^n 同伦等价（记为 $M^n \sim S^n$），则必有 $M^n \simeq S^n$．”注意到同伦条件比同胚（$\simeq$）弱，而同胚条件又比微分同胚（$\cong$）弱，因此这一猜测是不明显的．但其弱猜测“若 $M^n \simeq S^n \Rightarrow M^n \cong S^n$”似乎是成立的，可是 1956 年 Milnor 证明的 S^7 上有多个独立的微分同胚类，显然不合上述直观理解，这就是有名的 Milnor 怪球．为此，Milnor 于 1962 年获得号称数学中诺贝尔奖的两大奖之一的 Fields 奖．

也正是 1956 年 Milnor 怪球的产生，被认为是创立了**微分拓扑学**．此后于 1959 年 Smale（动力系统中 Smale 马蹄之父，现为数理经济学家）又证明了 $n \geqslant 6$ 时，

$$M^n \sim S^n \Rightarrow M^n \simeq S^n$$

① 单形又叫单纯形，n 维空间中 $n+1$ 个独立点集(无三点共线者)两两连线所成的凸形叫单纯形，它与优化数学中解线性规划问题的单纯形(法)，属同一概念．

② 庞加莱猜想：单联通三维闭流形与三维球面 S^3 同胚．最后由俄罗斯的佩雷尔曼于 2003 年得证．

再后 Fridman 证明了 $n=4$ 时，若

$$M^4 \simeq S^4 \Rightarrow M^4 \cong S^4$$

等.

微分拓扑学是研究流形（流形及纤维丛概念见本章第四节）上微分结构的学科，它充分运用纤维丛工具、拓扑 K-理论（对 K 群的几何研究）、同伦论以及示性类（表征微分流形上是否存在独立的向量场，也叫标架场）等工具．与数学其他学科一样，越往现代发展，交叉性越强，微分拓扑的工具与组合拓扑、代数拓扑乃至现代微分几何（大范围分析）等都有较大的交叉和融合.

五、典型的邻域数学Ⅱ：流形上的数学

移见下节“四”.

六、邻域数学思想的应用：一个社会核拓扑模型

借助邻域数学观点我们无不惊讶地看到，原来社会正是一个个的人（点）及其邻域系互相交叠覆盖而形成的一个高维的（社会）空间．据此，我们推广点集拓扑中开集和邻域思想，描述出由人类及其社会功能（邻域系）构成的社会．现简述其模型于下，聊作欣赏.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^K \times T \triangleq \mathbf{R}^{3+K+1}$（$\mathbf{R}$ 表欧氏空间），其上有离散拓扑空间 (Ω,τ)（τ 表 Ω 的幂集 2^Ω 时，即为离散拓扑空间）.

又设 $X \subset \mathbf{R}^3 \times \{0\} \times \{0\} \triangleq \mathbf{R}^3$（$\Omega$ 的 3 维子集）是离散点集，这里“点” $x \in X$ 不是几何点，它对 $\mathbf{R}^3$ 具有非 0 测度 $(m(x)_{R^3} \neq 0)$，但对 Ω 是 0 测度，且 X 对应着离散拓扑空间 $(X,2^X) \subset (\mathbf{R}^3,\tau)$.

显然 X 和 $\forall x \in 2^X$ 也都属于 Ω，且有 $2^X \subset \tau$，因而 $(X,2^X) \subset (\Omega,\tau)$ 是其子拓扑.

本段旨在将 $(X,2^X)$ 与离散拓扑空间 (Ω,τ) 结合，以形成一个具有新的拓扑结构的复合的拓扑空间，并容易建立起它与经典拓扑空间的关系.

定义 10.1 对于 $\forall x \in 2^X$，把以 x 的凸包作为内集时它在 $\mathbf{R}^n$ 空间的单连通开子集叫做 x 的邻域，记为 $\eta(x)$，则 $\{\eta(x)\}$（含 $\varnothing$）称为 x 在 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的邻域族．对 $\forall \eta(x) \in \{\eta(x)\}$，$x$ 叫做它的核.

特别地，我们以后取作 $\Omega = \bigcup_{x \in 2^X} \eta(x)$.

定义 10.2 记$\eta=\{\{\eta(x)\}\mid x\in 2^X,\eta(\varnothing)=\varnothing\}$，把满足如下条件的结构叫做$\Omega$上以$2^X$为核的核拓扑空间，记为$K_X(\Omega,2^X,\eta)$，简记为$K_X$.

(i) $\forall x\in 2^X$，必$\exists x_1\in 2^X$，$x_1\neq x\ni x_1\in\{\eta(x)\}\setminus\{x\}$；

(ii) $\forall\eta(x_1)\in\{\eta(x_1)\}$和$\forall\eta(x_2)\in\{\eta(x_2)\},x_1,x_2\in 2^X$，必

或者 $\exists x'\in 2^X,\ni\eta(x')\subset\eta(x_1)\cap\eta(x_2)$；

或者 $\eta(x_1)\cap\eta(x_2)=\varnothing$.

自然，x'也可以是x_1,x_2；

(iii) $\forall x_1,x_2\in 2^X$，必一切$\eta(x_1)\cup\eta(x_2)\in\eta$，$\eta(x_1)\in\{\eta(x_1)\}$，$\eta(x_2)\in\{\eta(x_2)\}$；

(iv) 必$\exists x_0\in 2^X\ni\Omega\in\{\eta(x_0)\}$；

(v) $\theta\in 2^X,\varnothing\in\eta$.

至此我们看到，似乎核拓扑空间K_X与一般拓扑空间(Ω,τ)有着本质区别．但易证两者也有着本质的共性．这就使得我们在应用中既能更准确地描述对象，又有更多的经典结论可供使用（有待继续研究）.

第三节 空间数学

至此，业已依稀显出，数学按其空间形式的发展已由古典的**数点式**发展到近代的**邻域式**．此后便有了两个发展方向：一个是向着无穷小空间进发，这点留到下一章专门讨论；另一个则是本节所要讲的现代的或说近现代的**空间数学**．它们表明了一个随着历史台阶而逐级上升、升华的过程.

有关空间的数学统称“空间数学”，它涉及现代数学中最为活跃的数学领域.在本节，首先揭示出现代数学研究中的“空间手法”，然后将以更大篇幅描述数学中空间概念的扩张梗概，并侧重于几何方面的叙述.

希望能通过空间概念的推广，接受启迪，上升成思想方法，形成（广义）空间思维习惯.

一、数学研究中的空间手法

1．来自集合论、代数学和线性泛函的启迪

我们知道，“集合论”的特点是以集合整体作为研究对象，并由宏观开始的，这与经典的研究特征“由局部开始”，是迥然不同的．推广集合论的这一特点，现

代数学上兴起了一种手法：首先是所研究的对象集不一定是量数的集合；其次是一开始即把所要研究的对象集用一个符号“囊括”起来（不管它能不能枚举、是否有限），然后找出它们（元素）的共性，赋予它一个定义，即形成一种特有的“空间”，再继续研究．这就是数学研究中的“空间手法”，它是继抽象代数后的又一种“不只针对数的数学”．这种手法在代数学中的表现是既早且典型的，诸如群$G(X,\cdot)$、环$H[X,+,\cdot]$、域$Y[X,+,\cdot]$、代数$D[X,K,\circ]$等都是以集合作为整体对象来研究的．如果说它的特征尚属自然，那么比如线性泛函，以函数空间作为整体对象来研究的特征则可说是集合论影响下的典型的空间手法了．比如度量空间，这是一类函数空间，只要能赋予一个集合以一种**度量**映射ρ，使之满足“度量三公理”（见上节）就成为一种度量空间，不管这个集合的元素是什么．例如，$l^\infty=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid x\in\mathbf{R}^\infty$（或$\mathbf{C}^\infty$），且$x$是有界序列$\}$．对此，前人巧妙地定义度量为$\rho(x^1,x^2)=\sup\limits_i|x_i^1-x_i^2|$，终于使之满足度量三公理，因而$l^\infty$成为度量空间，记为$(l^\infty,\rho)$．度量空间已成为点集拓扑学的基础，引出了系列的研究．显然，这是一种由宏观开始的“空间手法”．那么，在上述种种思想的启迪下，更有：

2．现代数学广泛的空间手法

关于“空间手法”，除了已谈到的拓扑空间(X,τ)、张量空间$\Gamma^r(V)$等形式外，还有所谓“三元组”形式．比如，概率空间$(\Omega,\mathscr{B},P)$，其中Ω为一个抽象集合；$\mathscr{B}\subset 2^\Omega$，且是个完全加法族（对$\cup$、$\cap$运算封闭）；$P$是$\mathscr{B}$上的概率测度，即一种集函数或说集合的泛函（注意$\mathscr{B}$的元素是一些集合）．测度空间$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$，其中$\Omega,\mathscr{B}$意义同概率空间的，$\mu$是一般测度映射．特别地，当$\mu(\Omega)=1$时，$(\Omega,\mathscr{B},\mu)=(\Omega,\mathscr{B},P)$（概率空间）等．概率空间、测度空间以及模糊空间$(\Omega,2^\Omega,A)$（这里$\Omega$一般叫做论域，$A$是模糊子集$A\in 2^\Omega$所对应的测度值（模糊值，一种泛函））等都是“测度性”空间．有关的“三元组”中标出了论域（广义地说）、集族和测度方式等．

此外，还有非测度性的特定空间，一般表以“二元组”，诸如赋范空间$(X,\|\cdot\|)$、内积空间（$X,<,>$）、索伯列夫空间$W^{mp}(\Omega)$（系数理方程工具，由函数集及其导函数集构成的一类赋范空间）以及上述(l^∞,ρ)、(X,τ)等皆是．

再则，还有一类非测度、非特定的一般空间，这就是通常所说的“集合”，用单个符号即可表示．比如说“函数f定义在空间X上”，这里空间X未赋予任何限制，则仅表一般集合．又如，一般说到算子空间T、函数空间$C([a,b])$等，都仅限于集合的泛指意义．

总之，我们应该看到现代数学中这种空间手法，一下子表出对象全体来，以

宏观的鸟瞰方式考虑它．这样的处理方式常常更有利于深入．实际上，这一思想在控制论、博弈论、决策论等许多“价值数学”中也已用起来了，我们应该及时意识到这点，尽早上升到思维层次上去．

3．另外两种空间手法—— 提升手法和投影手法

(1) 提升手法．比如，线性规划的单纯形方法中引入“松弛变量”而将不等式变成等式，拉格朗日条件极值中引入“拉氏乘子” λ 以及经济学上“影子价格”等皆属这种提升手法．这是把空间维数提高来考虑问题的手法．

又如，将一般动态系统化为动力系统，也是用的这一提升空间维数的提升手法．

作为思维方法，观察问题时也应该这样，这也是一种数学思维方法．

(2) 投影手法．此即将本属高维空间的问题作低维问题处理．比如，数学建模，本质上是丢掉了很多次要因素的．至于概率论，则更是明显地把主要因素以外的全部次要因素化作一个“干扰”因素来讨论了．这些都是投影手法．

特别地，作为一种思维方法，通常处理问题时“抓主要矛盾”也属此类投影手法．

二、欧氏空间数学

满足欧几里得几何公理（5 个）和公设（5 个）的空间叫做欧氏空间．3 维物理空间就是它的特例．自然，这一定义一下子使空间的维数可为任一自然数 n 了，或说一下子从物理空间推广出去了，一般记为 $\mathbf{R}^n$，有些书上记为 E^n．

实际上亦可见，欧氏空间也就是笛卡儿坐标表出的空间，本质上也可叫做笛氏空间，只是没有这种流行叫法而已．同时也有关系式 $E^n=\mathbf{R}^1\times\cdots\times\mathbf{R}^1$（$n$ 重笛卡儿积）．

欧氏空间是数学上最为基本的背景空间，也是每个了解数学的人最为熟悉的空间，这里不必对它作更多描述，仅提出如下几点认识．

(1) 欧氏空间是几何学的发祥地，最初的几何学即产生自二维或三维欧氏空间．

(2) 欧氏空间是数学的原始基地，是作数学思维的原始背景．

(3) 欧氏空间是几乎所有欧氏空间以外空间（不只是非欧空间）的检验和特例，也是创造这些欧氏空间以外空间的思维参照系．

(4) 19 世纪开始，欧氏空间逐步成为多元函数的背景空间，因而成为多元函数发展的基地，也是应用数学中**多因素思维**的几何背景．

(5) $n \geqslant 3$ 时 $\mathbf{R}^n$ 中图形能在纸上画出来吗？能，但无必要．“能”是因为建坐标系是一种表示论问题，只要在平面上划出 n 条交于一点的直线，定义它们两两正交，并给以单位长和定向标号即成；“无必要”是因为画出的高维空间图形已没有了直观感，失去了作图的直观意义．

(6) 物理空间被认为是 $\mathbf{R}^n$ 在低维的模型存在，但如今物理空间的概念也在推广．比如，爱因斯坦从 3 维推到了 4 维后，理论物理中又发现了更高维物理空间．例如，鲁卡斯与克莱因根据“超弦”理论认为时空空间是 10 维的，甚至有人说是 26 维的等．特别地，暗物质和黑洞空间的发现还预示着超空间的存在……？

三、非欧氏空间与几何学

从欧氏的《几何原本》问世以来，对其公理系的讨论一直未平息过，焦点性问题是第五公设，通常叫做“平行线公理”问题．近代以来也先后发表过多篇这方面的著作，但最具突破性的是 19 世纪初高斯、罗巴切夫斯基和波约几乎同期的独立研究．他们都改平行线公理为假设“过直线外一点可引无穷多条平行线”，由此（仅依靠数理逻辑）推出的几何属于“非欧几何”[①]．但他们的成果中只有罗氏的公开发表了（1826 年），并且他敢顶逆流坚持下来，这就使得创造非欧几何的功劳属于他了．

罗氏在其上述根本假设下，进一步援用诸如三角形内角和小于 π、不等同的三角形不相似、圆周率大于 π 等假设，纯逻辑地推出了一套自洽理论，叫做**罗巴切夫斯基几何**．由于它不合人们的欧氏空间经验，尽管他那时已是其母校喀山大学校长，一样受到攻击、嘲讽．

后来克莱因的“射影几何学”为罗氏几何给出了背景空间，叫做“罗巴切夫斯基空间”，并判定其中的直线具有负曲率，类似于欧氏空间中的双曲线，所以也把罗巴切夫斯基几何称为“双曲几何”．

在罗氏思想启迪下，1854 年黎曼（Riemann）反过来设“过直线外一点不存在平行线”，并在更多的附加假设下（除对偶于罗氏的条件外，还有诸如黎曼流形、黎曼曲率、黎曼面等假设），又推出了一套纯粹逻辑自洽的理论，叫做“黎曼几何”，其背景空间叫做“黎曼空间”．由于在射影几何意义下，黎曼空间里直线的曲率为正，类似于欧氏空间中的椭圆，所以也把黎曼几何叫做“椭圆几何”．

至此（19 世纪中叶），非欧几何终于得到了正式承认，同时在科学上和人们思维上引起了一场不大不小的革命．那就是：

---

① 一般说，不满足欧几里得公理的几何都叫做非欧几何，相应空间叫做非欧空间，但有时仅指直接违背欧氏第 5 公设的几何（罗氏几何、黎氏几何）为非欧几何．

(1) 非欧几何更加增强了“公理化”和“抽象化”数学的声誉与威信.

(2) 使人们的思维模式受到一次大大的震醒，发现人类在此之前一贯把现实的生存空间视为唯一的背景空间，视为唯一的客观存在，这是狭隘的，“天外还有天”.

(3) 事实上，紧接着在20世纪初物理学上发生的革命性事件完全印证了非欧几何. 它首先表明了，对宇宙（大空间）来说，或在物质的高速运动下，时空是会改变的，不再像我们现实生活下感觉到的那样是“平直（欧氏的）空间”，而是非欧氏的空间，比如“弯空间”（见下段）等. 当然这也同时说明，在高速或大空间中，我们的形式逻辑（至少其特征）还没有变，因此也是对第五章思想的印证.

(4) 特别地，由于爱因斯坦广义相对论适合于用黎曼几何作解释，这更增强了非欧几何的地位.

(5) 非欧几何的发生，大大促进了几何学的发展，因而在此后的几十年内，几何学上产生了一系列的大事件. 主要有:

① 1872 年，克莱因提出“艾尔兰根纲领”，揭示出几何学的实质在于一个**几何变换群**，任一门几何都是在相应变换群中求不变量（性）. 比如，欧氏几何就是在运动群中求不变量（性）.

② 在艾尔兰根纲领下，产生了**射影几何学**，记为(S,G)，G表示变换群，S表示射影空间. 比如，把平面上过定点O的射线束中任一直线上全部点视为一个等价类，取其一点作为代表叫做**射影**点，于是平面射线束被射影点集代替，形成所谓**射影直线**，由此可形成一维射影空间S_1，如此等. 在射影几何中无穷远成为一点，直线成为“圆”（见图 10.3 中直线l与圆的关系），平面成为“球”等.

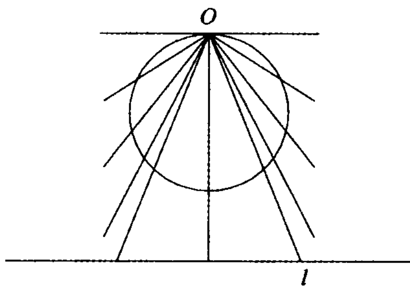


图 10.3

从概念上说，射影几何概念几乎覆盖了所有几何学. 因为原则上只要从S取不同子集，从G取相应的变换群子集即可构成不同的几何学.

称(S,G)是经典几何的总结和现代几何的发端.

③ 产生了仿射几何学. 线性变换

$$y = Ax + B$$

叫做**仿射变换**，它具有平移、旋转、扩缩、反射和投影作用，通常研究A满秩（非投影）情形，在一般仿射变换下的不变量有保直线性、保平行性、保线段比等. 通

过对曲线、曲面的仿射变换群研究其不变量（性）的几何学，叫做**仿射几何学**.

④ 产生了希尔伯特的公理化学科《几何基础》（1899 年）. 希氏用了五组共 21 个公理所成的“公理系统”（满足协调性、独立性、完备性），使几何学得以严格.

⑤ 现代微分几何的诞生. 用微积分方法研究曲线、曲面的数学叫做“微分几何学”. 经典的微分几何是建立在欧氏空间上的，属局部分析，它起自高斯的曲面**第一基本公式**. 现代微分几何，一般叫做“微分几何”，它有**几大特点**：

第一个是在一般 n 维流形上研究（概念见“四”），这点起自黎曼几何.

第二个是为在流形上进行微积分，采用了标架和外微分形式的外微分等一套成熟的方法，同时充分运用 Lie 群（连续群）工具.

第三个是作大范围分析，因此现代微分几何又叫大范围几何，或大范围分析. 真正的大范围分析起自 E.Cardan，他不仅创建了“外微分”体系，而且于 20 世纪 30 年代关键性地提出了“联络”（即绝对微分）概念（见第十三章第四节）. **仿射微分几何**（用微积分方法研究的仿射几何学）、辛几何、结触几何等是微分几何学中的重要方向；“流形”理论、张量分析、微分拓扑、调和分析等是其重要手段.

微分几何学的基本任务是研究流形上的曲率、短程线（测地线）、极小曲面、极小子流形等. “微分几何”是典型的现代数学学科.

四、弯空间：流形认识

1. 流形概念

流形（manifold）又叫弯空间，从数学上讲比如直线、平面的一般拓扑象（曲线、曲面）即如此. 当它们置于一个坐标系内时，其函数的分析性质往往很差. 比如，置于一个坐标系（平直空间）内的简单的球面 $x^2+y^2+z^2=1$，当在其上来看时，就是个流形. 这时，若用传统方法把任一个变量作为因变量，都存在不可导点；但若将其分割成有限个球冠（开域），使之能覆盖全球，每个球冠又可以同胚地映射到一个平面坐标系上去，且只要各重叠部分对应坐标系间的“映射”（变换）满足适当条件，即可用此法代替上述传统方法，从而回避了上述困难. 这就是流形的存在背景和意义，例如，数学对流形的一般处理方法即如此.

20 世纪上半叶，流形空间在宇宙和微观世界都找到了现实背景，更加刺激了流形理论的发展. 比如，球面、伪球面、双曲面、环面、默比乌斯面及一般曲面都是典型的二维流形，另外，还可推广到 1 维或任一 n 维情形.

流形只是一种广泛的几何对象，当赋予它不同结构，即可产生不同的理论．目前，建立在流形上的重要学科有**微分几何学、微分拓扑学**和**流形上微分动力系统**等．此外，“三”中所谈非欧空间本质上也是一种流形、弯空间．比如，黎曼空间就是一种“黎曼”流形，是所谓具有 R-度量的流形，且是微分流形．R-度量是定义在微分流形上的一种对称、非负、二阶张量形式．

特别地，欧氏空间就是个平凡（特殊情形）流形．

2．流形有关概念

如图 10.4 所示，设有 n 维 Housdorff 弯空间 M ($\forall x_1, x_2 \in M$, $\exists N(x_1) \cap N(x_2) = \varnothing$)，$M = \{u_i : u_i$ 为开邻域, $i \in \lambda$ (指标集), $M \subset \bigcup\limits_{i\in\lambda} u_i\}$ 且设 $u_i \cap u_j = V_{ij} \neq \varnothing$ ，再设同胚 $f_i : u_i \to R_i^u$ ， $f_j : u_j \to R_j^n$ ， V_{ij} 被分别映入 R_i^n 与 R_j^n 阴影区．再设如图中 $y_i \in R_i^n$ （阴影区）有

$$F(y_i) = f_j \circ f_i^{-1}(y) = y_j$$

则 M 叫做**拓扑流形**，其映射叫做共轭映射，一般形式为：

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\varphi} & U_j \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_j \\ R_i^n & \xrightarrow{F} & R_j^n \end{array}$$

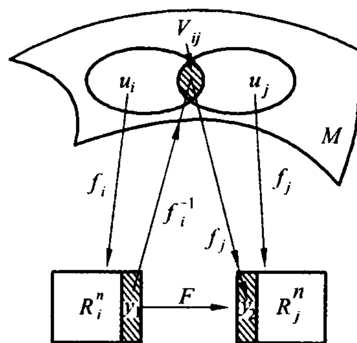


图 10.4

这时有 $F = f_j \circ \varphi \circ f_i^{-1}$ ，其中 R_i^n , R_j^n 皆有欧氏坐标，分别叫做 u_i , u_j 的**局部坐标**． $\{(u_i, f_i)\}_{i\in\lambda} = A(M)$ 叫做 M 的**图册**， (u_i, f_i) 叫做 M 的一个**卡**（或图）．

若 f_i 皆属 $C^r(u_i)$ 类函数，则 M 叫做 r 阶**微分流形**，只有微分流形之间才能有效地施以微分映射．

若 $\forall x \in M$ 皆有切空间 $T_x(M)$ （M 上 x 处一切切向量之集，是平直空间，如图 10.5 中 T_x ，且必与 M 同维），则有 M 上的**切丛**，记为

$B_T = (M, T_x(M), \pi) =$ (底空间 M, 切空间(纤维) T_x ，投影算子 π)

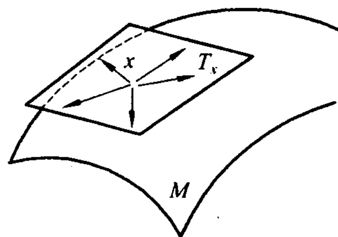


图 10.5

当 $T_x(M)$ 为一般 n 维线性空间（记为 ξ_x ）时，相应的丛 $(M, \xi_x, \pi) = B_\xi$ 叫做**纤维丛**．如图 10.6 中（a）表示二维底流形 M 上的丛，M 上的竖线表示过 M 上相应点的“纤维”（线性空间），那么（a）中虚线

所示曲面 J 表示与纤维丛交割成的一个**截痕**. J 实质上是 M 的一个“映射象”，记此映射为 ϕ，则有

$$\phi: M \to J$$

注意到 J 与每一纤维的交点是确定的，表示过 M 上相应点处的一个具体“向量”，而不再是该纤维空间或子空间. 为了更醒目可参见（b）图，比如把 J 与 ξ_x 的交点记为 J_x，则 J_x 只能是 M 上过 x 点的一个向量. 如此即知，整个 J 曲面（丛的截痕）实际上是 M 上的一个场. 这就是截痕的几何意义.

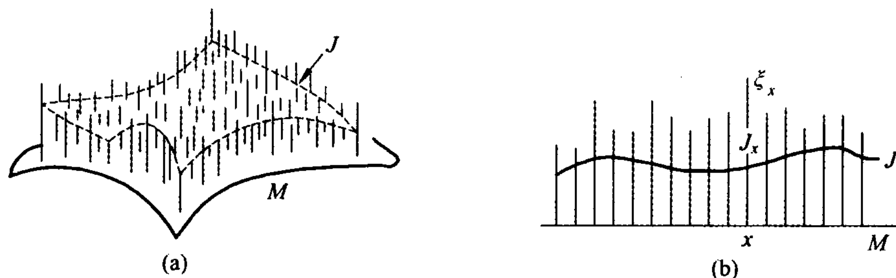


图 10.6

特别地，对于微分流形来说，“余切空间”概念也是十分重要的. 对于 $p \in M$，其余切空间记为 $T_p^*(M)$，它是 $T_p(M)$ 的对偶空间（概念见第四章），即若设 $f \in C^\infty(M)$，则有泛函

$$\mathrm{d}f: T_p(M) \to R$$

从而 $\{\mathrm{d}f\} = T_p^*(M)$.

进一步，设 $p \in M$ 的局部坐标系（取其基）为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则有 $T_p(m)$ 的基

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

同时 $T_p^*(M)$ 的基即可取为

$$(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n)$$

那么 $\forall \mathrm{d}f \in T_p^*(M)$，即有基的表达式

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}x_i \triangleq \alpha_i \mathrm{d}x_i \text{（这叫爱因斯坦记号）}$$

可见$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f$．于是“外微分形式”即可由此推广建立了，续见第十三章第一节．自然，相应的即有余切丛，概念自明．

丛（包括切丛；余切丛）和截痕概念都是流形理论中的重要概念．

五、函数空间的数学：谈谈泛函

泛函概念已不生疏，我们已多次提到过它．**泛函**是不以欧氏集合或欧氏空间作为定义域的、映射形式广义的标量函数．这是泛函概念的描述性定义（公理化定义见第四章第一节、二）．

泛函概念运用广泛，或说泛函的存在很广泛．比如可以说，整个现代分析类学科都是建立在泛函基础上的，当然这是因为现代分析本身就是以泛函、拓扑、代数作为综合基础的．

泛函概念及其研究是函数论、分析学发展的直接结果，也是其发展的一个新阶段和新层次．

在泛函概念下也有其直接的学科，叫做**泛函分析**，经典的叫线性泛函分析．作为泛函思想，我们可以从其线性意义作推广性地运用．

泛函分析的特征是研究“函数空间”．这里的函数含义很广，可以是一般函数，比如$C^0([a,b])$是$[a,b]\subset \mathbf{R}$上一切连续函数；可以是序列集，比如第二节谈到的l^∞；还可以是线性算子集（比如线性赋范空间之间的映射集）等．

泛函分析首先利用泛函概念把某些类函数结合成一块，形成**函数空间**；然后把该函数空间作为一个集合对象，探索其规律，诸如连续性、紧性、可测性、收敛性、不变性（不变子空间）等．

特别地，**收敛性**是泛函研究的又一大特征．作为例示，现举出泛函分析中的几个基本“空间”．

（1）度量空间．

其概念已多次提到，这是欧氏空间中距离概念（满足距离三公理）在泛函意义下的推广，记其为(X,ρ)．若其中序列$\{x_n\}\subset X$，在ρ意义下“收敛”于其收敛元$x_0\in X$，则(X,ρ)叫做**完备度量空间**，记为$(\bar{X},\rho)$．

度量空间有很多种，每个度量空间的函数类型不同，但每个度量空间皆可“完备”化．度量空间一般都是可分的（存在可数稠密子集），但也有例外（反例免）．若度量空间(X,ρ)中一切无穷序列皆有收敛子列，且收敛于X，则X叫做**列紧空间**．

在完备度量空间中还有着重要的**压缩映象原理**．设$T:X\to X$，$\forall x_1,x_2\in X$，有

$$\rho(Tx_1,Tx_2)\leqslant\theta\rho(x_1,x_2),\quad \theta\in[0,1)$$

则$\exists\bar{x}\in X\ni T\bar{x}=\bar{x}$（不动点）．

（2）线性赋范空间与 Banach 空间．

已说过，研究各种序列及序列的收敛性是泛函分析的特征之一，泛函分析为扩大函数空间的收敛性概念，赋予了一类新的概念，并构成一类新的满足其收敛性更强的函数空间，叫做"**线性赋范空间**"，记为$(X,\|\cdot\|)$．它要求X是个线性空间$L(X,R,\circ)$，这时的泛函映射$\|\cdot\|:X\to R$叫做赋范，$\|\cdot\|$值叫做范数，它是度量映射ρ的推广．

$\|\cdot\|$满足**赋范三公理**：

① $\forall x_1,x_2\in X$，$\lambda\in\mathbf{R}$，那么有$\|x_i\|=0\Leftrightarrow x_i=0$；

② $\|\lambda x_i\|=|\lambda|\cdot\|x_i\|$；

③ $\|x_1+x_2\|\leqslant\|x_1\|+\|x_2\|$．

那么，完备的线性赋范空间$(X,\|\cdot\|)$叫做 Banach **空间**，记为$(\bar{X},\|\cdot\|)$，简称B-空间．这里完备性概念与(X,ρ)中相同．

在线性赋范空间中还可讨论级数的收敛性，并作线性算子的研究．具体说是，线性算子宜于在 Banach 空间来研究，因为有了完备性空间才便于讨论算子序列的收敛性．

（3）内积空间与 Hilbert 空间．

设X是$L(X,R,\circ)$，有**内积映射**$\langle\cdot\rangle$：$X\times X\to\mathbf{R}$（或$\mathbf{C}$），并满足**内积四公理**：

① $\forall x_1,x_2,x_3\in X,\lambda\in\mathbf{R}\ni\langle\lambda x_1,x_2\rangle=\lambda\langle x_1,x_2\rangle$；

② $\langle x_1+x_2,x_3\rangle=\langle x_1,x_3\rangle+\langle x_2,x_3\rangle$；

③ 共轭：$\langle x_1,x_2\rangle=\overline{\langle x_2,x_1\rangle}$；

④ $\langle x_i,x_i\rangle\geqslant 0$（"="$\Leftrightarrow x_i=0$）"，

则X叫做内积空间，记为（$X,\langle\cdot\rangle$）．

完备的内积空间叫做 Hilbert **空间**，记为（$\bar{X},\langle\cdot\rangle$），简称 H-空间．这里完备性一如$(X,\rho)$中定义．可以说引入内积空间定义是为了过渡到 H-空间．

H-空间最大的特点是它有**无穷基**，因而这里$\forall x\in X$，皆可用函数项级数的形

式来表示．早在泛函分析形成（Banach创立成）之前，希氏即已发现诸如积分方程解，可化为无穷维代数方程组问题，进而提炼出了诸如l^2空间（平方可和序列空间，即$l^2=\{x=(x_1,x_2,\cdots)：\sum_i|x_i|^2<+\infty, x_i\in\mathbf{R}\}$）和$L^2$空间（平方可积函数空间，即$L^2(X)=\{f\mid f$是$X$上可测函数，且$\int_X|f|^2\mathrm{d}x<+\infty\}$，它对应于能量有限系统）等颇具实际意义的重要空间，皆可用无穷基线性表出，而这些函数空间的“平方可和（可积）性”皆可用“内积性”来表征，所以把这类空间定为H-空间，并用“内积”来定义则是自然的了．

在理论和实践中，B-空间$(\bar{X},\|\cdot\|)$与H-空间$(\bar{X},<\cdot>)$都是运用十分广泛的函数空间，但定义条件以前者更弱，所以前者的范畴包含后者．

此外，正如已经述及，还有正在兴起、即将形成基础学科的“非线性分析”，也叫做非线性泛函，它研究非线性算子、向量函数、高阶微积分和拓扑度、临界点理论等，不必多说．

六、关于参数空间的数学

已知，任一数学模型都含有参数组，又叫参变量组，它们作为系数、指数或常数项等形式而存在．把这些参变量的变域构成的空间叫做“参数空间”．

那么，数学关于参数空间的研究，较之自变量空间、因变量空间及其建模来，还很差，甚至表现得还不够自觉．但即使如此，对参数空间已有的研究和成果也是不少的，归结起来主要的可有如下几个方面的贡献．

（1）对参数空间的对偶性认识．如第四章所说，数学从线性的意义下严格地揭示了参数空间作为自变量空间的“对偶空间”特征，同时稍作推广地将一般参数空间视作相应自变量空间的对偶空间，这对于提高数学思维是大为有利的．

（2）计量模型、时序分析模型等对参数的估计，这主要是统计学上回归分析或叫极大似然估计方法类的贡献．它能利用样本值组对模型（一般是线性的或可化为线性的模型）系数进行规格化（或说公式化）的估计，十分有效，应用颇广．

（3）先验估计和检验，这是统计学为认识其对象的结构空间所作出的贡献．它主要是对其种种数值特征进行估计和假设检验．总的来说，整个数理统计学可以看做是对参数空间最为重视的一门学科．

（4）数学模拟方法，这是“数学建模”或“数学实验”学科的主要贡献．它用计算机上人机对话方式去确定模型系数，其特点是方法更活，因而能适应各种线性的和非线性的模型．

(5) 突变论（第四章第一节)、奇点理论、混沌理论等，可谓专门在模型参数空间上进行探索的数学分支.

(6) 社会度量学（见《社会度量学》）除了它广泛的任务外，作为“数学建模”的姊妹学科，它也十分强调对模型参数空间的广泛研究和度量.

(7) 特别地，在第四章第四节意义下知道，原来参数空间属系统的虚象，占了“半边天”. 无怪乎即使过去对它还处于无意识状态，仍然也有不少研究成果.

最后不能不提到，数学上越来越多的有名的“常数”，也具有系统（虚象空间元素）的泛函意义. 诸如引力常数 g、普朗克常数 h、费根堡蒙常数 δ 以及 e、π、c（=0.577 216…，欧拉常数）和 q（=0.618…，黄金分割）等，以及诸如影子价格、权系数和拉格朗日系数 λ 等，都是数学中具有深刻思想的参数，不能不引起我们的意识.

七、待发现微观世界的无穷小空间

至今已看到，作为（数与形结合的）数学，其“形”就是空间（包括空间整体和空间的局部、具体对象). 由于在“完全空间”（第四章第三节）意义下整个客观世界一切对象（系统）都有其空间背景，所以数学对“空间”的研究和认识已十分深入：从平直（欧氏）空间到弯曲（非欧）空间；从几何（点为元素的）空间到（非点元的）函数空间；从仅具实象意义的实空间到（二象意义下的）二元空间、四元空间等.

值得欣慰的是自然科学也越来越证实着这些空间概念和结论，诸如微观物理证实了高维空间；宇宙学证实了弯空间；相对论证实了二元空间；暗物质、黑洞等证实了超空间.

那么要问，数学对空间的认识已经到顶了吗？皆知，远为没有，关键是在区间[0,1]的连续统结构上尚步履维艰. 原来这就是个 0 与非 0 的空间结构问题，或说是离散点集过渡到连续统的空间形式问题，抑或说是知道了一个数再问最靠近它的数是什么的问题. 无独有偶，如今在微观物理学上人类亦正在为所谓“基本粒子”努力呢！这说明数学与物理学是“并行”的，如果任何一方取得突破，都将是对另一方的直接支援. 不过，目前看来双方的前沿都归结为数学了，续见下章.

本段旨在提出：有待发现和承认微观世界的无穷小空间.

第十一章　数学按其空间形式的发展深入：无穷小论

(1) 上一章最后的“闲话”谈到，数学（和物理学）的空间认识前沿是“连续统”结构问题，本质上是“无穷小空间”的认识问题．其实，数学关于“无穷小”的研究已不少．尽管它无助于无穷小空间的最终理解，但毕竟也算是对“无穷小空间”来自一个方面的认识，也是既有数学诸多内容，比如邻域数学、空间数学等的需要，特别对于我们理解微观世界、树立微观思维习惯颇具启示性．因此，这里专门开辟一章来介绍和认识“无穷小”问题．

(2) 无穷小世界含于“邻域”的底层，却不显含于邻域数学中．因为“邻域”虽小，可它仍然是欧氏空间的研究对象，是直观和直觉可及的．然而无穷小是又一个“小”的层次，是超乎直观的、具有独特本质的一个新对象．第六章谈到对“连续统”的悬而未决的公理集合论，是从正面对“无穷小空间”作全面揭示，是数学当今的前沿问题．本章则从一个直观的也是数学传统的途径对“无穷小”作一认识．

(3) 世界往上往下都有着无穷层次的结构，而世上任何事物任何学科都有着自己的**基本层次**．比如，从经典来讲，生物学的基本层次是细胞，化学的基本层次是原子，物理学的基本层次是分子，但随着科学的发展，生物学的基本层次已深入到分子，化学的基本层次已深入到量子，物理学的基本层次已进入所谓的“基本粒子”，甚至有“生物学说到底是化学，化学说到底是物理学”之说．那么要问，物理学说到底是什么？我们说那就是数学．而数学的“基本层次”是什么？显然，那就是（作为空间基本层次的）“无穷小”．

(4) 任一套科技理论或学科体系愈有效，其微观基础（基本层次）将来得愈深细．最终来说，“无穷小”至少应该是一切自然科学共同的基本层次．可惜数学至今还没有真正开始从正面去认识无穷小，更谈不上已经认识到了无穷小．

由此看来，关于无穷小的概念和知识也应该是所有科技工作者共同的基本层次，即使从这一角度看，也应该重视本章的研究．在本章中为强调某些思想，有些话不惜多次重复，希望不致感到啰唆．

第一节　数学对无穷小的认识回顾

关于这点，在第三章第四节略有谈及. 这里为了本章内容的系统性仍将独立述出.

一、无穷小对认识论、方法论的初次挑战

1. 毕达哥拉斯“有理数悖论”

这已是大家熟悉的了. 归结起来，毕氏犯“有理数错误”的原因仅在于对“任意小”这一超过了当时人们直觉能力的问题认识不足，也说它是无穷小概念在认识论层次上向人类提出的第一次挑战，从而引起了第一次数学危机. 可见，数学的发展，一迈步就遇上了“无穷小”的关卡，哪怕这时还谈不上真正的无穷小实质.

2. 芝诺悖论

芝诺（公元前 490—436 年），古希腊哲学家，巴门尼德的学生，埃利亚学派的代表人物，最有名的贡献是提出了“芝诺悖论”. 简单说即“飞矢不能达目的，静矢不能被射出”，也被解释为“亚奇尔（Achilles、西方走神、相当于中国的夸父）追不上乌龟”. 如图 11.1 所示，设 t_0 时亚氏在坐标 A_0 处，龟在 A_1 处，$A_1 - A_0 = a > 0$；同时起跑后，当亚氏至 A_1 时，龟已到了 A_2（$> A_1$）；当亚氏至 A_2 时龟又到了 A_3. 如此下去经过 n 个步骤后，亚至 A_n，龟至 A_{n+1}，总有

$$A_{n+1} > A_n$$

n 可任意大，因此亚氏永远追不上龟. 奇妙的是几千年来谁都认为该论甚谬，且容易破释，但谁的解释都得不到公认，以至本章从头至尾不时提到它.



图 11.1

3. 分杵定理

已谈及，我国战国时期（前 446—256 年）惠施氏曾提出，“一尺之杵，日取其半，万世不竭矣”. 这是容易证明的，即使以百年为一世，万世后也还剩 $[2^n]^{-1}$（尺）.

$$n=\left(365+\frac{1}{4}\right)\cdot 10^6$$

事实上，n为任意大时都不可“竭”，所以叫它是个“定理”，这是我国古代对无穷小认识的一个伟大成果.

4．数学对无穷小问题的处理方式

在当初数学的核心地域希腊，由于连连出现关于无穷小的悖论（有理数悖论和芝诺悖论），又一时对其认识无法深入，从而在方法论上只得小心从事．从此，在数学和哲学上都采取了一种“回避”无穷小的手法．具体说即采用了或说创造了“穷竭法”.

穷竭法在当时数学和哲学中的表现主要是**公理化**方法、**枚举性**方法和**构造性**方法，这些方法不仅体现在当时的《几何原本》与算术中，而且还延续至今，甚至今天还是整个数学中的一种朴素的方法．不同的只是这一方法在当初是占统治地位，而今只是还没有消亡，适时而用罢了．正如说石器时代以石头为主要工具，延续至今仍然不失为一种工具一样.

二、无穷小再次挑战与认识的进步

1．微积分的诞生

皆知，17 世纪 70 年代发明了微积分方法，从此数学表现出了两大特征：一方面，微积分方法出于它在函数分析和力学、物理、工程上的实际应用特征，显示出了强大生命力，因而迅速发展；另一方面，由于它的定义涉及“无穷小”，未能澄清其概念，引起了社会各界的广泛争论，包括哲学家、宗教界也参加进来了．人们发现，争论的实质仍然是 2000 年前的芝诺悖论问题.

微积分基本概念的争论一直伴随着它的方法论的发展，经历了整整 200 年，直到 19 世纪 70 年代才因创立了**极限论**而宣告结束.

2．对微积分的认识

在“极限论”产生之后，举世公认微积分方法的根本基础被严格地建立起来了，就连当时的反对派（比如红衣主教贝克莱派等）也只好沉默了．由此，更加连同先后几十年内发生的群论、非欧几何和集合论等，一起引发了 19 世纪末纯数学的爆炸性发展．其中产生的一大类以微积分学为中心的“分析学”，不能不说是极限论的功劳.

那么是否可说人类对无穷小认识已因极限论而到顶了呢？从以后一百多年的科学发展事实，和人类认识能力得到深化后的今天看来，对无穷小的认识远未到

顶．尽管极限论作为微积分学的基础来说是成功的，但作为对无穷小的认识，仍只能说还存在质的差异（续见下节）．

三、公理集合论：人类向无穷小的一次主动挑战

容易理解到，由实轴认识引出的公理集合论（见第六章第一节）之所以难以进展，本质上还是对“无穷小世界”的认识未突破．也就是说，连续统结构问题以及选择公理之难以判定，皆与无穷小邻域结构的本质直接相关．因此说，由康托尔创立的公理集合论是人类第一次主动向无穷小提出的挑战．由此可以猜想，公理集合论的突破将有利于对无穷小的认识，反之对无穷小认识的突破必有利于公理集合论的进展．

物理学本质上还是数学，只是它多了一种实证手段（实验验证）罢了．的确，正好在数学终于回避不了“无穷小”而不得不正视它、认识它的同时，物理学（大物理）也在逐步受到（本质上说仍然是）无穷小世界的挑战．比如，面临的量子世界认识、基本粒子认识以及统一场问题、黑洞理论、暗物质空间、宇宙流形等，皆属于无穷小或其对偶面（无穷大）的认识问题．

可以说正出于大家都认识到共同面临了“无穷小”难题，因而今天大家已自觉地携起手来，协力攻关，开创了数学与物理学很好的“联姻”道路，续见第三节和第十三章第二节．

四、非标准分析：人类对无穷小的再次主动挑战

这就是 20 世纪 60 年代初由鲁滨逊创立的非标准分析．鲁氏属逻辑主义学派，具体属“模型论”学科分支．非标准分析即产生于模型论，如今已成为一门独立分支．

非标准分析能完全代替“极限论”的功用（事实上还不止于此），亦即它同样能作为分析学的基础，但它引入的“无穷小”概念则完全是独立的．具体的见第三节．这里只要强调，非标准分析中明确提出了一个“单子（monad）”概念，并直接对其进行了正面认识．将看到实际上这就是个“无穷小邻域”的模型，所以我们说非标准分析是直接针对无穷小世界的一次主动挑战．

遗憾的是自非标准分析问世以来一直未受到很好地承认，反对者主要来自纯数学界，主要观点是说它没有新内容，只是极限论内容的平移．

对此我们有不同看法，见第五节．当然也得承认，该学科正在批评声中迅速发展着，比如至今 Springer-Verlag（Noth-Holland）出版社已出版了近 20 本非标准分析理论及其应用的专集．

第二节　极限论述评

一、述评申明

既然谈到“述评”就必然谈到它的优点和不足，但必须申明，这里仅仅是相对于认识“无穷小”这一最高任务来说的，即极限论的初始任务并非直接地、完全地认识无穷小，而仅在于解决微积分概念的基本原理问题，所以这里说的不足并非极限论的责任，更不是指责极限论．

换句话说，尽管微积分概念的基本原理属于无穷小问题，但并非“无穷小”世界的全部．如果已经认清了无穷小，自然对建立微积分游刃有余，反之，若仅从微积分概念的需要出发，则并不需要完全地认清“无穷小”，只需极限论即可．

亦即无穷小认识对于建立微积分的需要来说是充分的，但并非必要．当然，这点只是个认识性结论，仅是建立在实际观察基础上的，并没有严格的逻辑证明．事实上，从当初极限论的诞生能折服整个科学界这点，加上逾一个世纪的科学实践检验，我们有理由相信，它对于微积分学的基础来说已是足够的．因此单纯从微积分角度说，极限论应该是值得肯定的．

但我们这里是以完全地认识“无穷小世界”为目标．那么，在此标准下即可发现，极限论是不能代替无穷小认识的，因而相对来说，它是有缺陷的．这就是本节对极限论作“述评”的背景和条件，立此申明，以免有损极限论的威严．

二、极限论的优越性

1．极限论给出了又一种用有限去表述无穷的方法

已知（第八章），周期是自然界广泛存在的一种典型的用来表现无穷的有限形式，因此其理论也十分重要且广泛．那么，极限论包括无穷级数形式研究可算是另一种用有限来表征无穷的形式，甚至还是用以获得无穷结论的手段．这是十分了不起的．试看 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 的定义（或见第五章第六节、三、例 1）：

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ni\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon \tag{11.1}$$

则 $f(x)$ 叫做当 $x\to x_0$ 时的极限值为 $f(x_0)$．

须看到 $x\to x_0$ 是个无穷过程（随着“$\forall\varepsilon$”的越来越小地选取，x 是按“芝诺

步骤”而趋向x_0的)．但“无穷过程”是无法践行的，即定义中并未要我们去践行，而是如此容易地过渡到“无穷时刻”（x_0点）了．这是十分巧妙的．

2．极限论带来了微积分方法的“算术化”

由于极限的（公理化）定义来得简练而确切，致使由它建立起来的微分、积分定义也来得简练明快，没有繁复之感，以致整个微积分方法之容易掌握和运用，被科技界公认为“算术化”了的方法．它完全可以被列为算术第九则、十则运算．归根结底这是极限概念之简练性获得的效果．

3．极限论在微积分学上的实用效果是成功的

因为百余年来甚至说300余年来对微积分学激烈的研究，已经是对极限定义的一个严格检验过程．或可以说，几百年来，微积分学已被研究得相当成熟．尽管今天在初等微积分范围内还有论文，但已看不到突破性、基础性成果了．一个学科能达到这种状态已算是成熟的了．但是，却一直未发现在微积分意义下极限概念有什么不足．

不过必须指出，只能说是从微积分学来讲，极限论是成功的、完备的，不过将看到，若超出微积分概念，直接针对无穷小的认识，极限概念则显得远远不足了．

三、极限论的实质

1．极限论是一种方法、一种技术

相对于无穷小的认识来说，极限论只是**一种方法、一种技术**，它巧妙地通过有限情形的变动“趋势”分析，而直接获得无穷过程的终极值．

2．极限论对于无穷小邻域是“跳”过去的

比如“二、1”中，极限过程对于x_0的、也是对于$f(x_0)$的无穷小邻域，所采取的方法实质上是“跳过去的方式”，只是这里的“跳”来得十分隐讳罢了．因为从表达式看，对于$\forall\varepsilon>0$都得到了$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，似乎这里（在$f(x_0)$点附近）就不再有什么邻域被“跳”过了，似乎$x$（从而$f(x)$）就真的被“二、1”的方法一步不跳地达到了$x_0$(或$f(x_0)$)．其实不然，首先我们能思辨性地看到，要在有限步走完一个“**芝诺过程**”是不可能的．因此从逻辑上说必有一“跳”，就好像x_0(及$f(x_0)$)是一个具有模糊边界的湖心亭，它离湖边宽为任意小$\varepsilon>0$，因此极限之最终必须跳过这任意小“湖宽”，而不是按正常步骤到达x_0(或$f(x_0)$)．那么一方面认为这是正常过程，另一方面认为是跳过一个“湖宽”，问题出在哪里?

四、$\{\forall\varepsilon>0\}$只是个稠密集

这是个观念性问题，以往容易理解成$\forall\varepsilon>0$可以取遍$f(x_0)$附近的连续统邻域．其实即使从理念（逻辑思维）上看这也是不可能的．因据第六章认识，比如任意给定一个$\varepsilon>0$后，即不可能找到与ε值最靠近的、连续统意义下的实数值，即使用极限方式也得不到，何况这时还不能用极限方法，否则会犯“循环论证”错误．所以，$\{\forall\varepsilon>0\}$最多是个稠密集，这时有几点值得注意．

（1）稠密集与连续统有着质的差异．

虽然康托尔的连续统猜测还没有最后得证，但连续统概念是得到公认的，因此这里可用“测度论”来证明．因为稠密集是可数集，而可数集的测度为0，所以其“余集”是具有完全“勒贝格测度”（用区间套序列完成的测度）的连续统．因此两者有着质的差异．

（2）$\{\forall\varepsilon>0\}$对应的$f(x_0)$的以ε为半径的邻域族具有非0测度的交．

即若以$\{\forall\varepsilon>0\}$中每个ε为半径作$f(x_0)$的开邻域（同时有x_0的以相应δ为半径的邻域，只需讨论一个即可），则有$\{\forall\varepsilon>0\}$对应的开邻域族，记为$\{N(\varepsilon)\}$，相应空心邻域族记为$\{\mathring{N}(\varepsilon)\}$．显然，它们的无穷交（不能取极限）不只是$f(x_0)$一点，更非空集，而是一个具有非0半径的闭集，亦即非0测集．

（3）极限论对于无穷小邻域仍然是“回避”的．

根据（1）、（2）易知“三、2”结论是正确的，即极限论是跳过无穷小邻域的，因而仍然具有古希腊时对待无穷小的实质——回避性，只是极限论来得隐讳罢了．

为了揭示其“隐讳”实质，必须从概念上（或说观念上）彻底分清“稠密集”与“连续统”的区别；“遍历性”与“连续统”的区别；“任意小”与“无穷小”的区别．尽管后者在极限论中已被明确地注意到，但仔细看来，它仍然是建立在极限论基础上的（即极限为0的变量叫无穷小），因而仍然是“跳”过去的，而且这一跳非同小可，它是由可数集或稠密集跳到了连续统．因此这时要求必须用新的更深刻的观点去领会无穷小概念．

五、无穷小的一个新定义

据“四、（2）”分析，对于$\{\forall\varepsilon>0\}$，所对应的空心邻域系$\{N(\varepsilon)\}$的无穷交$\bigcap\limits_{\forall\varepsilon>0}\mathring{N}(\varepsilon)\triangleq\sigma\neq\varnothing$，则定义此$\sigma$为**无穷小**．

显然，该定义是与极限论中无穷小定义等价的，但也是不同的．特别不能误认为σ是个几何点，那只是经典的实数观点．

无穷小不能是一个点，而是类空心邻域，或说是一个变量．为叙述方便，无穷小可类似地说成无穷小邻域、无穷小（变）量、无穷小空间、无穷小世界等．

现在有个问题是，无穷小空间**有无维数性**？直觉认为应该有，但情况更复杂，从下段即可看出这点．

六、在无穷小概念下极限论显出的缺陷

我们说过，极限论的成功只是针对建立微积分学基础的，而相对于无穷小的认识来，它只是一种方法、一种处理技巧．以下现象说明，的确当遇到纯粹的无穷小结构（或说连续统特征）问题时，极限论即显出了它的不足，现举例说明：

1．关于 Peano 曲线的遍历性

1890 年 Peano 构造了 Peano 曲线（记为 P- 曲线），能将一维线段拓扑地与一个二维区域一一对应．然而它被视为“病态数学”中又一例，引起很大反响，先后被改作多种陈述方式．这里用 Hilbert 的陈述方式．如图 11.2 所示，（P_1）中有线段

$$I=[0,1] \quad 和 \quad D:[0,1]\times[0,1]$$

今用 P 氏拓扑（连续）映射 $P:I\to D$，具体是作一序列映射 $\{P_i\}$，其中 P_1 如图中（P_1）所示．

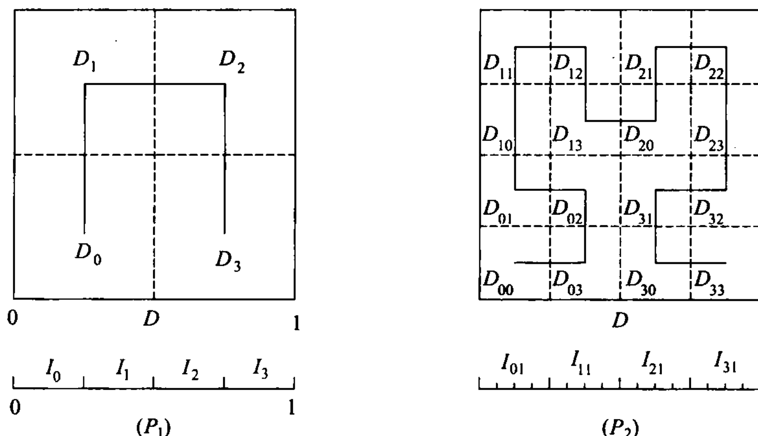


图 11.2

首先将 I, D 分别四等分，然后取各个 D_i（$i=0,\cdots,3$）的中点，并连成一马蹄形线，此时应注意两点：① 马蹄线即 I 的连续映象 $P_1(I)$；② 将 I_i 认为与子区域 D_i 对应．于是进入下一步 P_2，如图中（P_2）所示．作法是对各个 I_i, D_i 分别按第 1

步的作法，取有关记号为 $I_{ij}, D_{ij}, j=0,1,2,3$，并得出各自的马蹄折线，只是在定折线时注意到要便于最后将各马蹄线连成一条无斜边的 Jordan 折线.以下如法炮制.

已有结论是:

(1) 对于折线集 $\{P_i\}$，其中有各种交点集，此交点集之并构成了 D 上的稠密集.

(2) 由于 $D_i \supset D_{ij} \supset D_{ijk} \supset \cdots$，与之完全对应的有 $I_i \supset I_{ij} \supset I_{ijk} \supset \cdots$，所以各自的极限点也对应. 但前者是二维点，后者是一维点，由于 $i,j,k\cdots$ 代表了无穷个步骤，而每步指标分别独立取 0~3，所以可使 D 上一切点与 I 上点一一对应.

但我们应注意以下几点:

(1) 在 P_n-映射中，I 被分割成 $(2^n)^2$ 份，而 D 的任一边被分成 2^n 份，可见 I 的分割速度较之 D 的分割来，成指数式增加，但在可数意义下只有一个无穷概念. 因而上述现象只是在“可数”层次内的、“无穷”没有级别差异的前提下得到的.

(2) 显然 P-映射是个分形结构，其生成规律是，每一步中相应线段都被映成 1.5~2 倍，可变尺度，按分形维数意义，可定义 P_n-折线为 $1+r$ 维的分形①. 但不管怎样，经极限成为 P_∞ = Peano 曲线后，维数不可能变成 2. 亦即这时虽说 P_∞“充满”了 D，但并不意味着 P_∞ 卷曲在 D 内，它可以成为一个“连续统”.

(3) 当 P_n 中 n 任意大后，$I_{ijk\cdots n}$ 与 $D_{ijk\cdots n}$ 皆任意小（遵照（1），不管其缩小的级别差），但维数差别总存在. 那么这时取极限（跳过无穷小）是否合理? 这也是“五”中提出的“无穷小邻域”的维数问题.

总之，所有这些问题都是值得深刻回答的.

2. 又一例

如图 11.3 所示，就任一 $\triangle ABC$，对其底边 AB 作如下的分形映射 T，首先视 T_0 为

$$T_0 : AB \to ACB \text{ 折线}$$

再作折线映射

$$T_1 : AB \to AC_1A_1B_1B$$

只需首先取 AB 中点 A_1，然后过 A_1 作三角形另两边的平行线即成. 于是转入 T_2，如法炮制，有

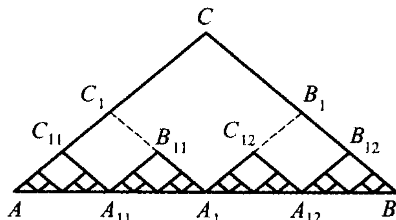


图 11.3

$$T_2 : AB \to AC_{11}A_{11}B_{11}A_1C_{12}A_{12}B_{12}B$$

---

① 设 $P_n^\alpha = P_{n+1}, \alpha = \ln P_{n+1} / \ln P_n \triangleq \ln \beta_n P_n / \ln P_n = 1 + \ln \beta_n / \ln P_n \triangleq 1 + r_n$ 这是个变尺度的分形，$r_n \in (\ln 1.5 / \ln P_n, \ln 2 / \ln P_\infty)$.

如此下去 T - 映射有几个特点：

（1） T_n - 折线总是奇顶点在 AB 上.

（2） 所有 T_n - 折线长度总是常量 $|T_n| = |AC| + |CB| =$ 常数.

（3） 随 n 的增加，折线的顶点与 AB 的距离在缩短，但其边与 AB 的夹角不变.

（4） 特别地，当 $n \to \infty$ 时，显然 $T_n \to T_\infty$ 重合于 AB，但其长

$$|T_\infty| = \lim_{n\to\infty} |T_n| = |AC| + |CB| \neq |AB| ?$$

顺便指出，这里"(1)，(2)"中的模型都是在第九章第三节提到的"系统形态迭代模型"，它们没有具体的数学表达式.

3．点点连续点点不可导函数例

数学分析之父魏尔斯特拉斯于 1875 年首次构造成功"病态数学"例，记做

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b^n \pi x),\ x \in \mathbf{R} \tag{11.2}$$

其中 $a_n \in (0,1)$，b 是奇数，满足 $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

如图 11.4 所示，这是个由无穷多个不同振幅、不同周期的余弦函数叠加而成的点点收敛函数，但只能用无穷形式表示，写不出有限形式，且画不出具体函数图来，只能示意于图 11.4 (a)，因此也没有直观感，令世人吃惊.

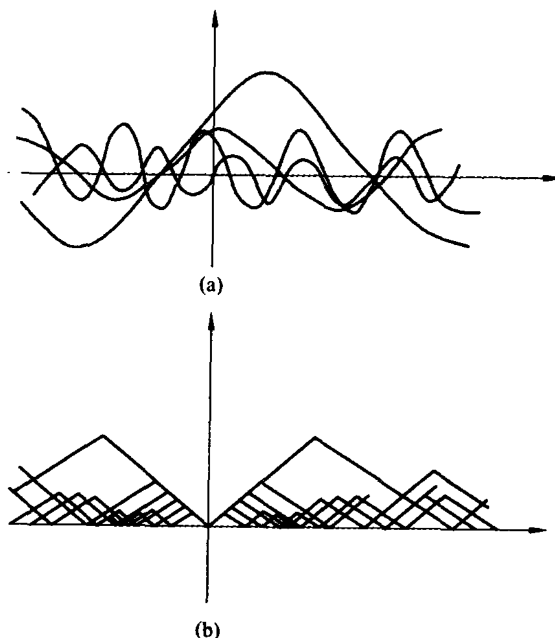


图 11.4

该魏氏例先后被表成多种形式，最有名的可能要数范·德·瓦尔登的简化，形如

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x) \tag{11.3}$$

其中，$U_k(x)=\dfrac{U_0(4^k x)}{4^k}$，为折线；

$U_0(4^k x)$ 在 $\left[\dfrac{n}{2\cdot 4^k},\dfrac{n+1}{2\cdot 4^k}\right]$ 上皆线性，$n\in\mathbf{Z}$（整数），且斜率为±1，周期为 $\dfrac{1}{4^k}$；

$U_k(x)\in\left[0,\dfrac{1}{2\cdot 4^k}\right]$，如图 11.4(b)所示.

这时容易直观到，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，皆可在式（11.3）中找到一个 k 和 n，使得折线 $U_k(x)$ 正好以 x 为其一个顶点，而其他折线如果不以 x 为顶点，即在 x 处为斜率等于±1 的线性函数. 于是容易观察到，这时（11.3）式在点 x 左右导数不相等（不可导），具体过程免记.

但须指出，我们的讨论“$\forall x\in\mathbf{R}$”其实质仅仅是在稠密集 $\{\forall x\}$ 上. 亦即对式（11.2）或（11.3）讨论的连续性和可微性都只是在稠密集上进行的. 也正如其原命题所述“点点连续、点点不可导”，这里“点点”的确只是稠密集而并非连续统，但讨论中多次采用极限论，经其一“跳”，跳过了“无穷小空间”即（不知不觉地）成为“连续统”上的结论了.

4．在极限意义下，无穷小世界被处理成有序结构了

我们本来说极限论是跳过了无穷小邻域，怎么又说它被处理成“有序结构了”呢？这是因为在极限概念中，所述过程都是有序的、有规律的，之所以能根据有限部分的趋势“跳”到终极点，正出于“承认跳过的邻域仍然是具有此“序结构”的，且仍然说它具有相应问题在有限情形的规律（变化趋势）”. 然而后面将看到无穷小空间的整体特征并不具备序结构，这里仅点到为止（续见后）.

总之，经一个世纪的“病态数学”研究和近二十年来分形几何研究，产生的奇异的甚至不可思议的实例还很多，仅有名的也还有诸如 Julia（复）曲线、Koch 曲线、康托尔曲线、和田曲线、施瓦茨折面等，其实我们自己还可举出一些这类奇异例来.

所有这些例有个共同特点，即不可对它们作出严格的原理解释. 过去我们常以此向学生炫耀，说“这就是数学的奥妙”，后来一想这不对. 作为数学上已经搞出来的东西，暂时不能理解者有，且属正常，但不可老停留在“不理解”上，更不应该以此作为数学的“奥妙”！因为这并不是数学的光荣. 作为数学家，特别是

数学家队伍，不应该让不可思议的结论安然存在.

那么，上述种种奇妙事实原因何在？我们不能不对它们所用的一个共同工具——极限方法表示怀疑，亦即极限方法在奠定微积分及其广大应用领域上是成功的，但它毕竟不是直接为着认识无穷小的完整概念的，当其用于认识无穷小时，难免要出现一些破绽.

直言之，上述不可思议现象可能出在运用了并没有完全表征无穷小本质的极限方法. 亦即在正面认识无穷小时，极限方法不再是犀利工具，或者不能用，至少需要改造.

第三节　非标准分析述评

一、背景及其思想的引入

在第二节已经看到，沿用极限概念和极限方法去认识“无穷小”是不行的，必须另觅蹊径. 实际上，对此可以说数理逻辑学早已开辟了多种途径. 比如，“公理集合论”，因其背景是认识实数结构，回答连续统猜测，所以亦如所说，其实质也是直接为着认识“无穷小世界”的. 又如，“模型论”这一数理逻辑又一分支，虽然其直接任务是解决数理逻辑的“内部问题”，诸如可判定性研究、模型的同构性研究、非欧几何真实性研究等，但对实数结构的认识总是它们不忘的应用领地. 实际上，“非标准分析”正出自“模型论”分支.

此外，第二节也已谈到，我们应该意识到，通常所说“$\forall x\in \mathbf{R}$”等具有“点”式概念的语句类，实质上都是把 $\mathbf{R}$ 作为一个“稠密集”来对待的，而不是过去所认为的“作为连续统”来对待. 那么这一来可说，实际上微积分学基本上是建立在“把 $\mathbf{R}$ 作为稠密集（但注意到稠密集不只是 $\mathbf{R}_r$）”上的. 原因很简单，因为其基础——极限概念就是这样的，真正涉及无穷小（好似作为稠密集的“小滚珠”（元素）间的润滑液层）的地方被“跳”过去了（也是被回避了），事实也是如此，也已谈及不必赘述.

那么从上述分析出发，我们完全可以将 $\mathbf{R}$ 看做由稠密集加上**稠密集**间的不具有点式特征的、“润滑液”式的**无穷小**世界构成. 但是分析学的经验表明，过去的分析学研究中很难直接凸出无穷小，更未直接认识无穷小，所以为要能直接进入“无穷小世界”，不能老待在原有分析学观念下，不能老待在所谓“$\mathbf{R}$”上来（‘点’式地）讨论，需要另立模型以将无穷小的位置鲜明地凸出来. 这就是我们理解的

非标准分析所产生的实际背景和思想基础.

鉴于非标准分析知识尚不普及，现本着本章内容的起码需要和对它的述评需要，给出它的内容提要于下（可参见徐利治等的《现代无穷小分析导引》）.

二、非标准分析概要

1．**R** 的非标准模型及其基本事实

（1）**序列类**：设 $x\in\mathbf{R}$，记 $\langle x\rangle=\left\{x_n\subset\mathbf{R}\mid\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\right\}$，则 $\langle x\rangle$ 称为 x 的序列类.

（2）模型的建立：取映射 *：$\mathbf{R}\to{}^*\mathbf{R}$，* 且满足下列条件之一：

① $^*\mathbf{R}\equiv\left\{\langle x\rangle\middle|x\in\overline{\mathbf{R}},\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{\infty\}\right\}$；

② $\forall x\in\mathbf{R},*(x)=\langle x\rangle\in{}^*\mathbf{R}$， (11.4)

也称 $^*\mathbf{R}$ 为 **R** 的扩张. 其特点是在 $^*\mathbf{R}$ 中鲜明地凸出了“无穷小”，也包含了无穷大 $\langle\infty\rangle$.

同时看到，这里实际上是把 **R** 作为稠密集 $\{\forall x\}$ 看待，把 $^*\mathbf{R}$ 作为稠密集加其无穷小邻域集（成为连续统）看待. 至少这样理解便于直观.

（3）$^*\mathbf{R}$ 上有线性序关系：即 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，有

$$\langle x+y\rangle=\langle x\rangle+\langle y\rangle\in{}^*\mathbf{R},\ \langle x\cdot y\rangle=\langle x\rangle\langle y\rangle\in{}^*\mathbf{R}$$

同时有序 $\leqslant$ 或 $\geqslant$ 关系并满足自反性、对称性、传递性.

（4）**无穷小**（大）：设 $\forall x\in{}^*\mathbf{R}$，记非标准绝对值为

$$|\langle x\rangle|\triangleq|x|=\begin{cases}\langle x\rangle, & \langle x\rangle>\langle 0\rangle\text{时}\\ -\langle x\rangle, & \langle x\rangle<\langle 0\rangle\text{时}\end{cases}$$

则当① $\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+$，恒有 $|x|<\varepsilon$，则 x 称为无穷小；

② $\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+$，恒有 $|x|>\varepsilon$，则 x 称为无穷大；

③ $\exists\varepsilon\in\mathbf{R}_+$，$\ni|x|\leqslant\varepsilon$，则 x 称为有限数.

注：① 这里“无穷小”概念等价于第二节、五中无穷小定义，同时这里无穷小概念与极限意义下的无穷小概念有着质的不同，极限下的定义含有“序’性，而这里不显含序性.

② $^*\mathbf{R}$ 中无穷大（小）有无穷多个，因设 $\omega=\langle\infty\rangle$，则 $\forall\varepsilon\in\mathbf{R}$，$\omega+\varepsilon$ 仍为 ∞；无穷小自明.

（5）$^*\mathbf{R}$ 中的“数”分为两类：要么有限数（包括无穷小），要么无穷大．因 $\langle\infty\rangle$ 中有无穷多个无穷大，它与 $^*\mathbf{R}$ 上有限数集皆无交．

注：$^*\mathbf{R}$ 上更多的性质如运算性质等，免记．

2．单子论（仅对 $^*\mathbf{R}$ 中有限数单子来说）

（1）定义：设 $x,y\in{}^*\mathbf{R}$，若

$$x-y=\text{无穷小}$$

则说 x,y 无限接近，记为 $x\simeq y$．

记 $\text{mon}(x)=\{y\in{}^*\mathbf{R}\mid x\simeq y\}$，则 $\text{mon}(x)$ 称为一个**单子**（monad）．

（2）单子 $\text{mon}(x)$（又叫 x 的晕圈）是无边界的（开邻域）．

例 1　证明 $\text{mon}(0)$ 有上界，但无上确界．

证明　反证法．设有上确界为 $a>0$，则有两种情形：

① 若 $a\in\text{mon}(0)$，则有 $na\in\text{mon}(0)$，但比如 $a<2a\in\text{mon}(0)$，这与 a 是上确界矛盾；

② 若 $a\,\overline{\in}\,\text{mon}(0)$，即 a 非无穷小，据其定义，$\dfrac{a}{2}$ 也非无穷小，故 $\dfrac{a}{2}$ 也是 $\text{mon}(0)$ 一个上界，但 $\dfrac{a}{2}<a$ 与 a 是上确界，矛盾．

证毕．

由此也说明 $\text{mon}(0)$ 与其他有限数的单子无交．

（3）$^*\mathbf{R}$ 中任两个单子 $\text{mon}(x),\text{mon}(y)$ 要么相重，要么无交．

这是因为 $^*\mathbf{R}=\{\langle x\rangle\}=\{\text{mon}(x)\}$，而 $\mathbf{R}={}^*\mathbf{R}/\langle x\rangle$（商），或说

$$\mathbf{R}={}^*\mathbf{R}/\text{mon}(x)$$

（4）$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 是 $^*\mathbf{R}$ 按 ZFC 公理系（第六章）中选择公理（9 个公理之第 9）形成的集合．亦即 $\bar{\mathbf{R}}$ 是 $^*\mathbf{R}=\{\text{mon}(x)+\text{mon}(\infty)\}$ 中每个单子取一个元素构成的．

（5）对于 $\text{mon}(x)\in{}^*\mathbf{R}$，若 $\forall y\in\text{mon}(x)$，必

$$y=x+\theta\ （\theta \text{为无穷小，注意无穷小不是一个具体数}）$$

（6）单子中不合阿基米德公理．

该公理说：$\forall a,b\in\mathbf{R}$，必 $\exists n\in\mathbf{N}\ni n|a|>|b|$．将其中 $\mathbf{R}$ 换作 $\text{mon}(x)$，则不成立．亦即无穷小之间不能作比较，或者根本地说，在无穷小邻域内不存在“点”式的数概念，因而不应该仍然理解成欧氏几何空间．

（7）单子 $\text{mon}(x)$ 内无序关系．可以说这只是对（6）的强调．

3．超结构及其性质

记 $V_0(\mathbf{R})=\mathbf{R}$，

$V_1(\mathbf{R})=\mathbf{R}\cup\varphi(\mathbf{R})$ （$\mathbf{R}$ 的幂集），

$V_2(\mathbf{R})=V_1(\mathbf{R})\cup\varphi(V_1(\mathbf{R}))$，

$\cdots$，

$V_n(\mathbf{R})=V_{n-1}(\mathbf{R})\cup\varphi(V_{n-1}(\mathbf{R}))$，$\cdots$.

则 $V(\mathbf{R})=\bigcup_{n=0}^{\infty}V_n(\mathbf{R})$ 叫做 $\mathbf{R}$ 的**超结构**.

它包含 $\mathbf{R}$ 及其子集族、实函数族乃至 $\mathbf{R}^n$ 上子集族、实函数族，$V(\mathbf{R})$ 的元素称为 $\mathbf{R}$ 的一个**实体**．则易知，比如 $\varnothing$ 为实体，$V_n(\mathbf{R})$ 为实体，实体的元素幂集皆实体，单子也为实体，一个 n 元实函数等皆为一个实体.

4．内集论

这是 E.Nelson 于 1977 年创立的，属非标准分析的一个分支，它是在 9 个 ZFC 公理上再加上自己的三个公理（转换公理、理想公理、标准化公理）构成的具有 12 个公理的“公理系统”，从而形成**内集论**.

“内集论”的主要概念有：

（1）内实体：若实体 $B\in V(^*\mathbf{R})$，且 $\exists A\in V(\mathbf{R})\ni B\in {}^*A$，则称 B 关于嵌入映射 $*:V(\mathbf{R})\to V(^*\mathbf{R})$ 为**内实体**；

（2）内集：具有内实体的集合．比如单子即一种**内集**；

（3）内函数：内集上的函数或函数族皆**内函数**.

内集论的主要结论有：

（1）ε-**分块结构**：在 $[a,b]=I$ 上有 $\hat{I}=\left\{a+j\varepsilon \mid j\in {}^*\mathbf{N}, j\leqslant\dfrac{b-a}{\varepsilon}, \varepsilon\text{为无穷小}\right\}$，它能使连续统离散化.

（2）*- **有限集**：具有有限个元素的内集称为 *- 有限集．比如，A 为 I 上一种子集族，若存在 f 能一一地将 $\mathbf{N}$ 的前有限个元素 $\{1,2,\cdots,n\}$ 映满 A，则 A 是 *- 有限集.

在 ε-分块结构意义下，$\mathbf{R}$ 是个 *- 有限集．据说，Nelson 以此破释了“芝诺悖论”（载《科学》1995.2 期）.

5．非标准分析应用简例

由于有些概念未作介绍，这里只能作“形式”地应用，见识见识而已.

例 2（极限） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^2-a^2}{x}$.

解 因为

$$f(x)=\frac{(a+x)^2-a^2}{x}=2a+x$$

当 $x\simeq 0$, $x\neq 0$ 时，取非标准映射 * 的逆映射，记为"$*^{-1}$"，有

$$*^{-1}(f(x))=*^{-1}(2a+x)=2a$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^2-a^2}{x}=2a$$

例 3（连续） 讨论

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 0 点的连续性.

解 注意到在 $\mathbf{R}$ 上有 $|f(x)|\leqslant|x|$，在 $^*\mathbf{R}$ 上也成立，则 $\forall x\in \mathrm{mon}(0)$，当 $x\simeq 0$ 时，必有

$$f(x)\simeq 0=f(0)$$

据连续定义（免叙），f 在 $x=0$ 连续.

例 4（导数） **定义**：在 $\mathrm{mon}(x_0)$ 内，如果 $f'(x_0)\simeq\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，那么记

$$f'(x_0)=*^{-1}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

则称 f 在 x_0 可导.

下面试求函数 $f(x)=2x^2+3x$ 的导数.

解 命 $\Delta x\in\mathrm{mon}(x)$，则有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}&=\frac{2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-2x^2-3x}{\Delta x}\\&=4x+3+2\Delta x\simeq 4x+3\end{aligned}$$

从而有

$$f'(x) = *^{-1}(4x+3+2\Delta x) = 4x+3$$

例 5（积分） 定义：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = *^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i\right) \text{（在这里对}[a,b]\text{作了 *- 有限划分）}$$

试证明：在 $\boldsymbol{R}$ 上 $F' = f$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

证明 对$[a,b]$作 *- 有限划分，记为Δ_∞，再由所谓“超中值定理”

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{\Delta x_i} = f(\xi_i),\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta F_i}{\Delta x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta F_i$$

再由所谓“转换原理”，即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

至此可略见，用非标准分析常常比极限论来得简便一些，但因系“平移”而不被承认．后于 1975 年 A.Leeb 建立了非标准测度空间（Leeb 空间），使非标准分析第一次突破了“平移”僵局．直到今天虽仍有怀疑派，但已越来越少．比如哥德尔就是它的积极支持者，数理逻辑学家中支持者也众．那么，下面将指出非标准分析更有极限论不及之处．

三、非标准分析开启了真正的无穷小认识

1．再 议

第十章中谈到，在笛卡儿连续数学中已经发展了丰富的邻域数学和空间数学，特别在“邻域数学”中还频繁地用到极限概念或直接用到无穷小概念．但不能不承认，尽管如此，也尽管无穷小邻域正是“邻域”的底层和特例，“邻域数学”中并未真正地、正面地认识过无穷小，更谈不上认识到了无穷小．具体说，我们在本章第二节也分析指出，极限论并不属于正式认识无穷小的理论．

我们认为，可以说真正属于认识无穷小的数学有两门：

（1）公理集合论．虽说它是为解决连续统猜测，但这个问题的本质也在于无穷小．也就是说，它的解决直接有利于无穷小认识的解决，反之亦然．

（2）非标准分析．正如关于非标准分析专著《现代无穷小分析导引》（见本节

一）书名所显示出的，非标准分析的最大特征之一即在于正面认识无穷小，而且代表了人类对“现代对无穷小”的认识水平.

顺便指出，这样两门说得上真正认识无穷小的学科分支，皆出自或说皆基于对实轴的结构认识.

可以说，“现代几何学”直接进入了无穷大世界认识，“公理集合论”直接进入了（不可数）无穷多世界认识，那么“非标准分析”则直接进入了无穷小世界认识.

猜测，上述“三个方向”的难度是同级的、同质的，也是关联的，因而必能几乎同步发展和几乎同期成功.

2. 实 质

“非标准分析”最大的突破在于给出了“单子”概念. 这就是无穷小邻域，它直接对单子的结构进行认识，也就是对无穷小的正面认识. 这是摈弃了极限论中“跳”的、回避的实质，是认识无穷小的一个本质的进步.

“单子”的提出不只是对无穷小的一般承认，而且是把无穷小作为一个新的空间结构层次而被摆到了凸出的地位，摆到明处来了，然而这以前的数学中对无穷小的提法容易给人一种“无穷小只是一种小邻域”的错觉.

的确，在非标准分析中即产生了如下性质.

四、无穷小的初步性质

再次强调，无穷小不是一个数，即使说数也是个变数. 因而所谓无穷小、无穷小量、无穷小邻域、无穷小空间、无穷小世界、无穷小对象甚至单子等叫法皆属等价说法. 因此，非标准分析中所获得的单子的性质，即是无穷小的性质. 鉴于无穷小认识之艰巨性和真正对它作认识的历史短暂性，这里把已获得的性质说成是“初步性质”，现简列于下：

(1) 无穷小不满足**阿基米德公理**（概念见本节二、2、(6)）.

(2) 无穷小邻域内无“序”关系.

(3) 无穷小邻域由无穷多元构成.

(4) $^*\mathbf{R}$ 中单子（无穷小邻域）之间无非空交集.

(5) 无穷小邻域是开集，有上界但无上确界.

五、非标准分析之不足

毕竟非标准分析的目标仅在于以扩张 $\mathbf{R}$ 为手段，去重建一套更优的分析学，

而无心恋战“无穷小认识”. 换句话说，无穷小认识还不是它的直接任务，所以它对无穷小的认识仅在于“敷已所用”. 因此当我们直接站在“无穷小认识”立场来看时，即可发现它仍有明显的不足，而且是带实质性的. 简单来说可有:

(1) 非标准分析未能真正承认无穷小是数学按空间层次递进中的一个新层次或新台阶，它对历史的突破（贡献）仅在于能正面地、直接地去认识无穷小. 正因如此，它对无穷小作正面、直接认识时，意识性并不强.

(2) 它对无穷小世界的认识只是纯数理逻辑的，或说仅把无穷小世界看成一个（类似）纯欧氏几何对象，因而仍然具有欧氏“几何点”的、(因而是）静态的特征. 而这里的直觉和下节的启示使我们认为这未必恰当.

下节将看到,非标准分析及其内集论获得的成果在物理学上也能得到印证.但为什么同一个真理，在物理学中易理解而在非标准分析中往往却很涩口，令人不解? 仅仅因为它是数学,特别是“枯燥”的数理逻辑吗? 我们认为还不止于此. 比如,就无穷小认识来说,也许还跟非标准分析仅把无穷小世界视作一个纯几何的、静态的空间结构对象有关.

换句话说，如果把一个动的对象看成静的了，而又能推出正确的结果来，难免得走很多弯路，从而使得本来就抽象的数学变得更抽象、更复杂，折腾更大了.

第四节　来自微观世界的启示

要说数学与整个科学有着一个几乎并行而又不完全出自有意识操作的历史轨迹，这一说法已不新鲜. 但当我们带着“无穷小”观点扫视科技领域时，更能惊异地看到这一典型事实. 特别能看到，在物理、力学上，对微观世界的认识成果与数学关于无穷小的认识成果，是多么惊人的匹配! 可惜它们没有很好地交流、互补共进. 尽管可说数学与物理已有了较好的“联姻”，但相对于科学深入和关隘险阻的需求来说，则显得还不够. 特别地，已有的联姻事实主要的仅表现为物理学借鉴数学成果，反之则太少.

那么本节则希望通过认识数学在无穷小上的认识成果与物理、力学在微观世界上的独立成果之间的对应与对偶关系，看到目前大家都面临一个别具本质的、艰巨的微观世界认识. 在这样的时候抱守任何一种先进手段都不如综合大家的犀利武器更有利于发展. 因此呼吁各方在无穷小认识上密切合作、互相参照、互补共进，特别是数学更应参照物理学的成果，接受其“思想启迪”.

一、关于微观世界

1．基本概念

微观世界是近现代物理学的前沿领域，一般指分子、原子层次以下的物质形式，其理论可分为量子理论、基本粒子论和场理论（相对论）三大领域．“量子理论”又叫量子力学，主要研究把微观粒子（量子）作为一个“单位元”的运动规律；“基本粒子论”主要研究把微观粒子作为一个系统（有内在空间的）来研究，诸如其存在形式、结构特征、演变规律等；至于“场理论”，已不只是电磁场的，更是对爱因斯坦时空和引力场以及嗣后的更高层次的统一场、规范场理论了．这似乎不是微观世界而是宏观世界的了．其实，宏微共轭，两者不可孤立起来研究．事实上，量子理论和基本粒子理论对象都是以场的形式存在的，都是在场的环境下研究的（局部时空，量子化），所以场理论是它们的研究基础，甚至现在还产生了量子场论、量子引力场论等（猜测：在“射影几何”观点下，无穷大世界与无穷小世界是“合同”的）．

2．发展状态与基本特征

对于微观世界的认识是个艰苦的摸索过程，特别是量子力学的产生更是如此．其最大的障碍在于突破几百年来已形成的深固的意识习惯，认为一切运动都是符合牛顿定律的．比如，当初人们一直认为“物理学已经成熟，后来者就只需作点充实性工作了”．就连当时的物理学名家也这么认为，甚至比如普朗克这位首先提出“能量子”概念，成为量子力学第一道破关人的他，其后也因牛顿力学意识太深而多次犯错误，终未能在自己开创之路上继续走下去．由此可见，要能突破旧有的意识和观念有多么困难．

的确，比如在微观物理学上至今还存在着**学派之争**，而且一度很激烈，即说明了这点．它们主要表现在两个方面：

(1) 物质可分性之争．应该说这是在发现了电子以后才产生的（19 世纪晚期）．由于物理学越往纵深发展、物质剖分越往细处进发，不仅实验更加困难，其性态也将产生越来越大的本质变化，这就不是所有人都能理解的了，于是争论（认识分歧）在所难免．首先表现为“波粒”二象之争，其次是电子是否可分，物质的分割是否有尽头等．这时实质上已进入哲学之争、又一层次的二象之争了．

在争论之中，可分论（即无限可分论或叫层子论）者和不可分论（即有限可分论）者双方，都在各自的理论下前进着．对于实验的实证科学来讲，这时并未产生非要否定了谁自己才能发展的问题．的确，比如近几十年来已发现不下 100 种基本粒子，更有“TOP 夸克”的发现和理论的支持使得似乎不可分学派占了

上风．但同时人们又不能不承认基本粒子并不基本，因而主张不再叫“基本粒子”而直接叫“粒子”．可见这又是对可分派的支持，所以说这一争论至今难分伯仲．笔者的观点属折中派．事实上，越到微处，那种出自介观空间的可分与不可分概念已越来越模糊，甚至失去了意义．

（2）量子力学之争．这主要表现为玻尔及其哥本哈根学派同爱因斯坦及其支持者之间的争论．这场争论从 20 世纪初（20 年代）开始以来，可以说一直未停息过．虽然元老早已去世，但后继者之间仍在争论，不过最近的争论主要表现为量子哲学、量子逻辑的了．

3．研究特征：实验、数学、哲学并用

尽管可以说近代物理学在依赖实验的同时也充分运用了牛顿开创的“证明论”方法，致使物理学一直以数学运用见长，但也不能不说物理学在深入到微观世界以前仍然是以实验作为主要手段的，即在进入微观世界后，逐渐表现出对数学的依赖特征，甚至对哲学的依赖特征了．这已是熟知事实，上面也顺带提到过，现仅就微观物理中的数学运用再举出几条事实．

（1）场数学的运用．这主要表现在场方程的建立与研究（运用偏微分方程理论和现代几何学）上．这里有名的模型很多，除麦克斯韦方程（第四章第三节、三）外，再简略地表出几个，聊作赏析．

① 薛定谔方程：

$$ih\partial\phi/\partial t = H\phi$$

其中 ϕ 为波函数，H 为 Hamilton 算符，h 为普朗克常数，i 为虚数．

② 狄拉克方程：

$$\sum_{\mu=1}^{4} r_\mu \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} + i\frac{mc}{h}\phi = 0$$

其中 r_μ 为四阶方阵，m 为质量，c 为光速．

③ 爱因斯坦统一场方程：

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi k T_{ij}$$

其中 R_{ij} 为 Ricci 曲率，R 为标量曲率（均值），g_{ij} 为 Riemann 度量，T_{ij} 为能量——应力张量，k 为常数．

④ 杨振宁-米尔斯规范场方程：此方程有多种形式，这里给出按能量的变分原理得到的方程．由能量泛函

$$E(\varphi)=\int_{\Sigma}e(\varphi)\mathrm{d}v \quad \left(\varphi\text{ 为调和函数}, e(\varphi)=g_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x^{j}}g^{ij}\right)$$

再据变分原理 $\delta E(\varphi)=0$，得欧拉-拉格朗日方程，此即杨-米方程：

$$g^{ij}\left(\frac{\partial^{2}\varphi^{\alpha}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}-\underset{M}{\Gamma}{}^{k}_{ij}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^{k}}+\underset{N}{\Gamma}{}^{i}_{\beta r}\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial\varphi^{r}}{\partial x^{i}}\right)=0 \quad (\varphi:M\to N, \Delta\varphi=0, \Gamma\text{ 为联络系数})$$

（2）泛函理论的应用. 比如，量子力学需要在 Hilbert（内积）空间上进行，而且要运用冯·诺伊曼代数、“线性算子谱分析”，因此它要广泛用到矩阵工具. 这也是量子力学的前期曾叫做“矩阵力学”的缘故.

（3）统计学的运用. 皆知，量子力学的一大特征即表现为实验的统计分析，因此，统计物理学也是在量子力学背景下发展起来的，同时又充分运用到了量子理论.

（4）代数学和群论、群表示论的运用. 这是因为场被量子化，成为粒子来研究时，有诸如相位、旋转、坐标、角量、动量等离散的力学量，加上第七章所说的客观世界存在代数结构的普遍性，使得它用上代数工具和群论工具成为必然. 但注意到，代数和群的概念用到这里，往往还需要结合具体对象的实际特征和要求再去创造，进而建立起（赋予）自己特有的“代数”和“群”，致使才有它独自的 Racah 代数、冯·诺伊曼代数（冯氏代数也直接产生于量子理论）等以及重正化群、量子旋转群、正交群等.

二、微观世界的一般特征

这也就是微观粒子的特征，这些特征之间并非完全独立，现一并罗列于下.

（1）**测不准性**. 此即海森伯提出的有名的测不准原理（第九章第三节已提及），特别强调，这时的测不准不是技术问题而是逻辑问题，又逻辑来自对象的（高速）运动属性，所以说是实质性问题.

（2）**非因果性**（意义自明）.

（3）**随机性**. 玻尔用它来解释“测不准原理”，可见它与“1”具有等价性.

（4）**二象性**（参见第四章第四节），具体说是“波、粒”二象性. 对于微观粒子，二象之间不可偏颇，这也是它不合牛顿力学的一个重要原因.

（5）量子理论虽具自洽性，但有**不完备性**. 这也是爱因斯坦等的所谓“EPR 悖论”（1935 年）所表明的.

（6）**非连续性**，亦即牛顿物理中对微观粒子“集”所形成的场是从它的总体物质来说的，这时场对于其量子自然具有连续性. 那么微观粒子理论则是非连续

性的，这是在更深入的一个（微观）层次上来说的.

(7) **非定域性**：系指测量系统与被测系统之间的非独立性、相互影响性.

(8) **非静态性**. 比如，量子力学本来即在于研究量子的运动规律，基本粒子也是总处于瞬息即变状态的，所以它们的特征必然是非静态的.

(9) 具有**场特性**. 量子是以场形式存在的，场的一大特征是“能充满牛顿空间但不占据该空间”，量子也能穿越介观物质.

(10) 具有**高速度**、**高曲率**、**高频率**及**自旋**的运动特征.

此外，还有“基本粒子越分越大”、“基本粒子质量 < 每个构成基本粒子的夸克质量”等都是不同于直观世界的性质.

三、微观世界的根本特征：非牛顿空间

这就是非经典物理的特征，或叫**非牛顿物理特征**. 也可用物理学上一个说法，把微观世界的根本特征说成是具有**不可尺度性**.

所谓“不可尺度性”，即在牛顿物理的意义下，它具有不确定性、测不准性，因而具有牛顿物理意义下的随机性、非连续性、非静态性、非定域性，从而也是牛顿物理意义下的非因果性、不完备性. 也就是说，“二”中所述微观世界的所有特征皆属非牛顿物理的，属于对牛顿物理来说“不可尺度”的空间.

换句话说，典型的微观世界是个非牛顿系统，或叫**不可尺度空间**. 因此，不能简单地把微观系统看做我们直观的、生活经验所及空间的拓扑压缩，而应该特别看到随着牛顿时空的“缩小”，到了一定程度，原有物理性质将不再保持了，原来直观的物质特征将逐步转化，而产生“质”的变化.[①]

历史经验表明：物理学从牛顿空间进入不可尺度空间是从“黑暗”中摸索过来的. 根本上来说，有个人们**改换观念，扭转思维模式**的过程，也就是由从未想到还有个非物理空间的意识，转换到承认“天外还有天”、牛顿空间外还有非牛顿空间这一事实的“换脑子”的过程.

历史总是事后清楚，评价历史总比创造历史容易. 那么现在来回顾科学史不无明白，面对客观世界认识的每次突破，人们都存在个“换脑子”的斗争过程，突破愈大，斗争愈烈. 那么人们为什么老不吸取经验教训，以致在这次大突破中还有如此艰苦的过程？这倒是谁都可以解释、无须正面回答的了.

由此我们相信，今后的每次科学大突破仍将有它的“换脑子”过程，可把这一现象视为自然规律，把它叫做**科学进展原理**吧. 作为科学工作者，我们应以历

---

① 无独有偶，把这种基本粒子与介观物质的本质差异对应到社会，容易看到，家庭生活特征与社会生活特征也具有本质性的差异，这里免予赘述.

史为鉴，尽量要求自己的思维不至僵化，不要故步自封．当大家都有这样的修养了，今后的“科学进展原理”将会表现得越来越弱．

还需指出，(形式上）非牛顿空间包括宏微两类：一类是量子理论、基本粒子世界；另一类则是相对论空间、场理论对象．也的确，上述基本特征在两类空间都能得到体现，且两种理论从来都不是孤立的，甚至（猜测过）在某种更高层次意义下两类空间是“合同”的.

四、无穷小世界与非牛顿空间的关系

现在回到本章的主题，不禁发现，数学独立获得的无穷小知识与物理学独立获得的微观世界特征之间有着何等的对偶性、相容性和相似性．归结起来，主要表现为:

(1) 两者间的相容性．首先看到，尽管过去数学与物理是各自独立地探索着(从逻辑上说是）同一类微观世界（前者依赖数理逻辑，后者依赖实验和实证)，但各自所获结论无一矛盾，甚至具有一致性．这是为什么？显然并非偶然，也正是共处一个物质宇宙所决定的逻辑之“绳”把大家暗暗地拴在一起了．所以即使互无交流、独自行进，最后发现仍然是同向并行的．

(2) 皆具有**非经典性**．已知微观世界具有非牛顿性，而无穷小世界（比如单子）具有非欧氏空间性（比如不合阿基米德公理)，因此可以说，$n=3$ 的欧氏空间正是牛顿世界，两者是同实质的，即同样是突破了经典的数理空间而深入到了另一个世界.

(3) 皆具有**不可尺度性**．这在无穷小世界即表现为，比如单子内的元素不可比较大小，在微观物理则根本地表现为一个“测不准”性．

此外，下段还将表明，基本粒子与无穷小世界之间有着进一步的对应关系．同时第“六”段还将指出，各自独立地研究不是好办法．

五、超弦：基本粒子论对无穷小理论的支持

“超弦”理论是对微观粒子与无穷小理论之间对应关系的又一次深刻揭示．微观物理中最初仅把基本粒子作为一个**质点**（也就是几何点）来看待．这一来所建模型总具有**奇异性**或**发散性**，与实际大为不合，特别在引力场与（电磁）强场的关系上更是难以刻画．后来（1960 年代末)，物理学家引入了所谓**弦**模型，给问题打开了一个突破口．基本思路是：把粒子（化为 X^m）视为 $\mathbf{R}^n$ 空间的元素，即 $X^m\in\mathbf{R}^n$，从而研究其波函数 $W(X^m)$．这一来，虽使一些现象得到了解释，但更

多新问题又出现了，于是“弦”理论一度冷落．直到 1980 年代初，E.Witten 提出了超对称理论，进而给出了思想更为深刻的“超弦”模型，再度使之复活，并因此作为一位物理学家获得了 1990 年世界最高数学奖——菲尔兹奖．

其基本思路可表述为：对于 $X^m \in \mathbf{R}^n$，先给出它的一个泛函空间 $F(X^m)$，然后再在 $F(\cdot)$ 上讨论新的波函数 $W(f)$，$f \in F(X^m)$（思想更为深刻了），以此来表征基本粒子的结构和行为．

换句话说，超弦理论是把基本粒子作为一个新的抽象空间来研究，这也使得有关理论得以自洽，并与引力场理论相容，引出一系列重要成果，为整个基本粒子研究开创了一个漂亮的、有望得到引力场与量子场（在更高层次上）“大统一”的理论框架．

从数学角度来看，一方面，上述事实正说明基本粒子原本不是一个“点”（几何点），而是一个深层次上的新空间．最初给出的“弦”对应于一个高维空间模型，而“超弦”则对应于一个泛函空间模型．另一方面，场中每个基本粒子“点”对应的一条弦或超弦分别意味着一个一维或高维的“纤维（空间）”，因而这时的场就是个基本粒子场上的纤维丛（参见第十章第三节）．不过这里的纤维是“粒子（空间）”**内在**的，与其“底”空间（基本粒子集所形成的场）已不是同一个观念下的空间．

总之，由此看到了，物理学经过独立的探索正确地指示出：**基本粒子是又一形式的空间**．那么，根据其性质与无穷小的对应关系，完全能看到：基本粒子（内部世界）**正对应着无穷小空间**．如果这样，它们同时说明了以下容易接受的事实：

（1）基本粒子不基本．尽管各种基本粒子的大小不一，但“超弦”这一统一理论表明，所有基本粒子都还有着丰富的内在空间，且这种内在空间才更为精确地对应于无穷小世界．换句话说，基本粒子（作为基本元）所在的局部时空还不是无穷小世界．

（2）物理学上已有的基本粒子理论，包括量子力学等，仅仅是揭示了粒子的外在特征．诸如粒子作为质点的运动规律和它的自旋、粒子之间关系等，从无穷小角度看，还不是真正的无穷小世界内在的规律．不过毕竟因为无穷小是个开域，当空间自介观过渡到无穷小时，并非突跳式进入，而是表现为有关性质的逐步典型化．所以，原有的基本粒子性质虽不算典型的无穷小性质，却也具有“无穷小性”，或说具有一定程度的无穷小特征，可供无穷小理论参考．

（3）特别地，从“二象论”角度看去更能得知，E.Witten 的成功是因为他的思想更具有“二象”实质．首先，这里 X^m 为实象空间，而泛函 $F(X^m)$ 正是它的虚象空间，自然，$F(X^m)$ 中元素（不是点而）更像“弦”了．其次，E.Witten 提

出的“超对称性”不正是二象间“对称”关系的特征吗？也正是基本粒子的“二象观”才使物理学与数学结合的最为自然.

六、在微观领域数、理有必要进一步“联姻”

尽管在规范场论这一宏观领域的研究中，数学与物理有了很好的“联姻”（陈省身说），在微观领域也有了一定的合作，但毕竟因为“无穷小数学”尚未在数学中形成一个正面的公开方向，还谈不上在无穷小意义下的数理“联姻”. 不过“联姻”是十分必要的，也是发展的趋势. 这时我们应该注意几点：

（1）应改变过去“联姻”多重于数学对物理的结合或说数学对物理的作用，但反之则较弱这一事实. 当然，这与“规范场理论”属物理问题这一特征有关. 那么对微观世界的认识则是各自都面临的任务，这时的“联姻”应该是彼此互补、互相参照的，只有这样才能更有利于事业的进展.

（2）应加强微观物理对数学的结合.

数学应该充分地参照微观物理上的成果，以补充、修正自己的方法，更重要的是接受新思想. 比如，目前直接可以参考的有：

① 微观粒子的“波、粒”二象性特征. 这对于单子论和公理集合论的建模都是值得参考的，其实从根本上来说这是一个观念问题.

② 动态性思维. 已知，无穷小（单子）论，实质上是一种几何的、静态的思维模式，但从微观物理看来，不应该是这样. 所以应该在“单子”中引入二象机制和“动”的机制.

（3）数学对微观物理的参照. 数学除了它的方法性，诸如群、代数、统计、泛函等对于微观物理的工具性应用外，由于数学依赖的是“逻辑”，所以其结论也具有更深层次的参考性. 比如，借助无穷小思想来认识基本粒子，即容易看到它还不是无穷小，但也算是对无穷小世界的一种逼近状态，同时也容易接受和理解粒子内的“空间性”.

总之，在数、理共同面临的微观世界认识上，更有条件、也更有必要进一步“联姻”

第五节　客观世界的“动”机制认识

为了最后用无穷小知识解释芝诺悖论，这里再引入一个“动”邻域概念.

一、从能量认识谈起

人类历史是随着对能量的认识、开发和利用进展而进展的．从燧人氏钻木取火到牛顿力学诞生算是一个大的阶段，这是仅凭盲目体会和生活经验去自然地利用能量的低级阶段．自牛顿力学产生后，就变成主动地、自觉地、科学地去认识能量、发掘能量和利用能量了．

但是今天看来，此期内的科学还仅仅局限于介观空间和浅层认识．还是20世纪初产生的相对论和量子力学、高能物理（基本粒子物理）才把人类对自然能量的认识、开发和利用“意识”提到了一个新的层次，今天看来正是这样．

今天，根据爱因斯坦质能公式，即 $E=mc^2$（E 为能量，m 为质量，c 为真空中光速)，我们终于能醒悟道，**整个物质世界都由能量构成，能量才是物质世界最为基础，最为统一的“基本物质”**．那么是否还可以说，整个客观世界，包括还没有认识到的、物质世界以外的一切对象，都是由能量构成的呢？具体回答也许是很久以后的事，不过我们猜测答案是肯定的（参见《大自然复杂性原理》)．

客观世界的能量可分为宏观、介观和微观三大层次，其中宏微二观是作为“二象”对偶的两大层次，它们的能量和运动状态皆是宇宙生成时一次赋予的，因此皆很稳定．相对来说，介观能量十分复杂，它既属宏微二观的中介，又有有机世界的有机能量表现，更有人类的能量意识和能量行为参与．后者可叫做社会能量．

社会能量是人类为着自己的利益，凭着自己的精神（超）能对自然能，包括宏、微、介观能量的开发，通过转换、释放、激发、提取所形成的有价值的能量，比如自然能（来自水、风、矿、食等)、热能、机械能、电能、原子能等．

总之可说，社会能量汇集了自然的宏、微、介观能，人为的非自然能和有机能以及精神世界的超能等，是最为复杂的能量的综合表现领域．能量利用水平也是社会发展水平的一个重要体现.

二、能量的本质与“动”机制

能量究竟是什么？这是很难说清楚的．它既是物体又不是物体，既是战争又不是战争，既是世界又不是世界，它能操纵机器、操纵社会，也能发起洪灾、产生地震，可是自古以来，除了现象观察外，谁也没看见过“能量”，真是一个幽灵、一个魔鬼或就是所说的上帝和神吧．但这都不是科学的回答．不过仅仅把它说成是“物质”也等于没有回答．我们要的是它的机理，它的本质，要的是本原性回答，这就非同小可了．相信这个回答也是科学最为困难的问题之一．不过也许最难的问题“最容易”回答，那就是说，“能量是客观大自然之根本存在形式，或说

客观世界原本即充满着这种被我们称之为‘能量’的东西”. 也许会问这个根本的“能量”从哪里来? 实质上这时提问者已有个“空”的前提意识了，这是不合理的，这是来自生活（介观）经验的主观意识反映.

的确，可以看到，似乎世上一切概念都可以找到它的对偶概念，但唯有“能量”一词难以找到它的确切的对偶，这也许能支持“能量就是大自然唯一的本原存在”的说法.

有人说，“不可想象，没有数学社会怎么生存”，那么更不可想象，没有能量，甚至说没有被实物化了的“游离”能量，世界将是什么状态！是的，正是能量构成了世界的一切，正是能量激活了世界，也是能量赋予了世界的无限生机，世上一切现象皆可归结为能量的转换与演变. 一句话，是能量决定了“运动”这一客观世界的根本特征，有能量才有“动”、才有“功”.

换句话说，在能量之下，世界欲静而不止，正是能量赋予了世界上一切**“动”的机制**. 所谓动的“机制”是说即使从介观世界上局部看来，一切相对静止的对象都有可能动. 这是因为能量要转换、要传递，能量局部趋平衡、全局趋动荡，能量增则熵增. 但能量是守恒的，所以能量之海永无平静. 特别在社会这个巨复杂力学系统中，更因各种人为的能量作用，动的机制更为复杂和突出.

三、动机制与动邻域

下面说明在“动机制”下，任何物体或事物都有个“动邻域”. 现假设一个运动体（质点）$x\in\mathbf{R}^n$，它总有个速度向量$\dot{x}\triangleq\vec{V}$，这一点在运动体内是感觉不出来的，只有通过参考系的鉴别才能知道. 这时系统为$(x,\dot{x})\in\mathbf{R}^{2n}$，因$\dot{x}$属切空间，仍为$n$维空间. 那么我们可以抽象地理解到，这时$\mathbf{R}^{2n}$中的$\dot{x}$有一个投影在（$x$所在的“相”空间）$\mathbf{R}^n$内的由$\vec{V}$决定的一个**动邻域**，记为

$$\pi D(x,\delta(\vec{V}\text{或能量}w)) \tag{11.5}$$

注：动邻域定义（按式（11.5））为x此刻能独立（在力学系统内）运行的距离. 如图 11.5 所示，为便于突出动态系统$(x,\dot{x})$的动邻域（投影域（11.5），记为$\pi D(\cdot)$）与其投影原象$D(\cdot)$间的关系，取相空间为流形M（n维），$x\in M$，$x=x(t)$. 过x的切平面为T_x，这时

$$D(x,\delta(\vec{V}\text{或}w))\triangleq D(\cdot)\subset T_x$$

而动邻域为$\pi D(\cdot)\subset M$，它们的关系一目了然. 图 11.6 仍对平直空间来考虑.

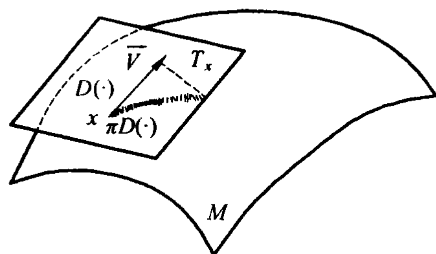


图 11.5

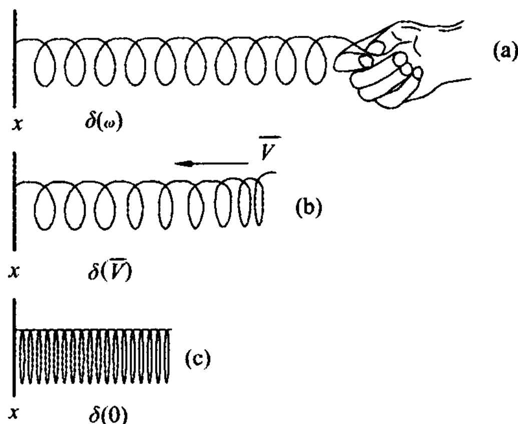


图 11.6

现继续回到式（11.5）中作解释，有

$$\delta(\overrightarrow{V}\text{ 或 }w)=\begin{cases}\delta(\overrightarrow{V}),\ \overrightarrow{V}\neq \mathbf{0}\\ \delta(w),\ \overrightarrow{V}=\mathbf{0}\\ \delta(\mathbf{0}),\ \overrightarrow{V}=w=\mathbf{0}\end{cases} \tag{11.6}$$

其中 $\delta(\overrightarrow{V})$ 表示这时 x 的动邻域的尺度大小，且不大于 $|\overrightarrow{V}|$，具体的可根据情况临时界定，同时 $D(x,\delta(\overrightarrow{V}))$ 是个单侧邻域，如图 11.6（b）所示.

$\delta(w)$ 中 w 表示 x 所具备的具有“动机制”的能量大小. 比如，在 x 受了力但尚未产生运动时的“蓄能”状态即如此，$\delta(w)$ 可视 w 的大小界定为一个有限数. 又，当 x 具有相对势能时，可能因此势能而产生运动，这时 w 即表此势能. $\delta(w)$ 也表示一个有限数，$D(x,\delta(w))$ 为一单侧邻域，例图 11.6（a）所示. 也将 $\pi D(x,\delta(w))$ 叫做趋势邻域.

$\delta(0)$ 表示 x 处于静止状态且上述 $\delta(w)$ 中蓄能为 0 的情形，$\delta(0)$ 是一个无穷小数，这时的 $D(x,\delta(0))$ 是无向（或叫迷向）邻域，其维数与 x 所在空间维数相同，可理解为 x（物体）表层微粒的微观运动所决定的范围，例示于图 11.6（c）.

我们说，由于动机制的普遍存在性，动邻域也是广泛存在的. 尽管它是个抽象对象而看不到，但显然它也属于 x 的**属性空间**，因而是一个抽象的存在. 那么它在我们的脑子里也应该有一个形象的“存在”.

这时，比如带着动邻域意识看世界，则应满富动感；当看到一个危险事物时，脑子里的危险动邻域容易立即唤起心声……，特别对于 $D(x,\delta(0))$，还有它的数学意义. 也就是说，当 x 处于相对来说十分稳定的状态时，我们也应“看到”它有

个（无穷小）动邻域．比如，取 x 为 $\mathbf{R}$ 上任一点时（注意这时的点实际上仅属于稠密点集 $\{x \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}_r$，集合 $\{D(x,\delta(0))\}$ 为连续统的 $\mathbf{R}$ 轴上一无穷小子集．同时还可用此观点去“观看”连续函数等．

例 6 在 $\mathbf{R}^3$ 中，两个孤立波（或一般波）不管同向还是逆向相遇时，看起来似乎叠加统一了，但它们立即又会分离，各行其道．这是为什么？这是因为它们是 $(x,\dot{x})$ 系统属 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 空间，或说有个无形的、不同的动邻域存在，只是在 $\mathbf{R}^3$ 中看不出来罢了．因此似乎“觉得”它们真的叠加了，其实不然，它们各自的由其 $\dot{x}$ 决定的动邻域可能不同，所以统一不起来．生活中类似“动邻域”现象还多，兹免赘述．

四、动邻域与高维空间

今天人们已经知道，时空是运动产生的相对效果，我们所处的时空就是运动产生的，是宇宙的总体运转产生了 $\mathbf{R}^3 \times T$．那么在介观空间中，通常的运动能不能产生“时空”？或说有没有个由它的运动产生的特有空间呢？我们说是有的，可从两方面来说．

（1）在狭义相对论中，实际上仅据洛伦兹变换，设 x 沿某坐标轴运动，其速度为 v，则可记运动系的时空为 (t',x')，它相对于旧系（时空 (t,x)）的运动即有关系

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

可见，即使在一般速度下运动，其时空也在变，这一“变”即说明它也在产生时空（叠加在原时空上），只是当 v 不大时，其变化很小很小罢了．

（2）式（11.5）、（11.6）中表出的动邻域也说明了一种“时空”，在这里仅叫做“空间”．比如，$\pi D(x,\delta(\vec{V}))$ 和 $\pi D(x,\delta(w))$ 实质上是一种 x 所在空间（设为 $\mathbf{R}^3$）以外的（切）空间投影到 $\mathbf{R}^3$ 上来的一个“影子”，如图 11.6 中（a）、（b）所示，而这些影子分别是个整体，它不具备 $\mathbf{R}^3$（x 所在空间）的性质和结构．比如，$\pi D(\cdot)$ 即不服从 $\mathbf{R}^3$ 上的分割性，这点是下节将用到的性质．

所以，比如对$D(x,\delta(\vec{V}))$，如果考虑到$x\in\mathbf{R}^3\times T$，记x在$\mathbf{R}^3\times T$上的邻域为$N(x,\delta)$，则这时x的“全空间”邻域为

$$N(x,\delta)\times D(x,\delta(\vec{V}))\triangleq\widetilde{N}(x)$$

显然，$\widetilde{N}(x)$的维数（记为m）必满足$m>4$．比如，对于非线性运动，至少应有$m>5$(免叙)．

同时对于$D(x,\delta(w))$，由于这时x未运动，所以仅有

$$x\in\mathbf{R}^3\times 0,\quad M(x,\delta)\subset\mathbf{R}^3\times 0$$

$\pi D(x,\delta(w))$也叫做x的**趋势邻域**．这时x的全空间邻域为

$$N(x,\delta)\times D(x,\delta(w))\triangleq\tilde{\tilde{N}}(x)$$

其维数（记为m'）必满足$m'>3$．

特别地，现在来看看无穷小邻域$D(x,\delta(0))$，由粒子物理学中“弦”和“超弦”理论，这时$D(x,\delta(0))$就是个“粒子”，只是它不属于$\mathbf{R}^3$．皆因x在全空间的无穷小邻域（记）为

$$D(x,\delta(0))\times D(x,\delta^*(0))\triangleq\overline{\widetilde{N}}(x)$$

无穷小$\overline{\widetilde{N}}(x)$是个高维空间$\mathbf{R}^n(n>3)$的粒子，但因它（粒子）有内部空间结构，因此对应地有自己的“超弦”．此超弦也是高维非欧空间（记为$A(x)$），只是应注意到$A(x)$与$\mathbf{R}^n$属不同层次的“空间”，即非同日而语的两类空间．或说，$A(x)$是非欧空间，它是无穷小“空间”中元素的运动状态引起的“时空”．特别地，无穷小邻域$N(x,\delta(0))$和$D(x,\delta^*(0))$也对应地有其$A(x)$中的子超弦．

第六节　无穷小认识与芝诺悖论解释

在第一节至第五节的准备下，现在来正面认识一下无穷小世界．

一、基于第一节至第五节的几点定性认识

1．认识无穷小有必要数、理互补

(请读者自己叙述)

2．无穷小世界是个新领域

非标准分析的“单子”理论和粒子物理的“超弦”理论皆独立地说明，无穷小领域是个非欧的新世界，它有着很多奇特的性质，它是认识客观世界的一个必经的层次，一个更深层的“空间”．仅凭量变-质变这一“二律背反”定律也应该承认这点．

3．认识无穷小不能仅凭数理逻辑

本章分析过程和第五章知识使我们体会到，无穷小世界所属逻辑范畴已不是典型的形式逻辑范围．因此，它更不属于作为形式逻辑的典型和核心范畴的数理逻辑．比如，(前述）爱因斯坦等的“EPR 悖论”表明的“量子理论不具完备性”，即能显示这点．又如，数理逻辑有着典型的“因果律”，而已知无穷小世界不满足因果律，这些都能说明上述结论．

4．无穷小世界是个动态系统

这是参照了物理学结论的断言．也就是说，不能再把无穷小世界作为介观上的几何空间结构来看待，既然是“动”的，就意味着更高维的空间．比如，超弦理论表明，即使粒子（从外观看的“无穷小”整体）属于 $\mathbf{R}^3$，但其“内部”则是个高维空间，甚至是高维的非欧空间，实则如第五节所述，因为“动”就有高维的实质．

5．无穷小世界的运动是高速度、高频率、高曲率、高自旋的，因而是非欧空间的，且是“复值”的

为什么粒子物理又叫高能物理？这既表示粒子可释放出高能，又表示粒子在作高速运动．那么尽管粒子物理还不是典型的无穷小研究，但因无穷小邻域是开的，逐步过渡的，所以它也能显示出无穷小的一些特征．又，数学和物理皆表明，在局部时空下的高速运动必是高频的、高曲率的，而且是非牛顿空间的，至少是爱因斯坦时空．此外，数学也表明，描述高频、高曲率对象，是典型的复域中的问题，所以它应该是复值的（根据第七章第三节)．

由此说明，比如超弦理论应该在复域上研究，单子理论也应该是复域的．总之，无穷小理论都应该建立在复域上，这也是物理学上早已有了的结论，因为有这样的说法“理论物理在上个世纪的伟大发现是复平面”．

6．无穷小世界具有典型的二象性

看来这里所说“二象”的具体形式也是不简单的，对粒子作外观的分析表明它是“波粒”二象的，那么进入到粒子内部的“超弦世界”又是什么样的“二象”

呢？还有待探讨．总之，据第四章认识，这里二象性结构是必然的且必须作二象地描述，这是肯定的．因愈向微观，二象间的份额比将更倾向“波”象或叫“软”象、“虚”象．然而在非标准分析中以及（也属于无穷小理论的）公理集合论中似乎还没有“二象性”意识．

至此，对于无穷小世界或说单子、粒子的内部结构，以及它们一起形成的实轴结构，都在我们脑子里形成了一个直观形象，这就是对它形成的“概念”．至于其正确性和详尽性，只能在研究过程中继续得到修正和充实．下面将据此作出它的数学描述．

在此之前，首先作出心理概念的图示．须知，要完全描述心理这幅概念图是很难的，现仅将稠密的“单子”孤立出来形象化以表明它与 **R**, ***R** 的关系图，见图 11.7．当看到，它与图 6.5 何其相似．



图 11.7

二、复单子：无穷小的一个模型描述

根据上述定性认识，现在进一步对无穷小空间作一模型描述，我们取名为“复单子”

1．条件（公理）准备

（1） $\forall x \in \mathbf{R}$，其无穷小邻域记为 $N(x)$， $N(x) \in {}^*\mathbf{R}$， $N(x)$ 叫做 x 的**单子**．

（2） $\forall y \in N(x)$，有

$$y = y_1 + \mathrm{i}y_2 \triangleq \mathrm{e}^{\alpha + ikt}$$

此即 $N(x)$ 的复表示，以此将 $N(x)$ 叫做 x 的**复单子**．

（3）在 $N(x)$ 内，任二元素之间不能直接比较大小，除非经过泛函映射．此即复单子满足**无序性**．

（4）在复单子上不满足**阿基米德公理**．

2．***R** 的一个复单子结构

以 **R** 为底空间，对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 取相应虚轴（记为 $\mathrm{I}R_x$）为 x 对应的纤维空间，再取正投影映射 π，其逆射为

$$\pi^{-1}(x) = \mathrm{I}R_x \ (x \in \mathbf{R})$$

则有“丛”$(R,\mathrm{I}R,\pi^{-1})$．这时视纤维$\mathrm{I}R_x \in \mathrm{I}R$为$x$的复单子，即有

$$\mathrm{I}R_x = N(x)$$

注意到$\mathrm{I}R_x$是无穷小空间，它不与$\mathbf{R}$同空间层次，就连它的维数和结构特征都有待进一步探讨．目前，从数、理方面的研究，都只能说刚开始．比如，来自物理的超弦理论预示，它的结构是很复杂的．这里对$\mathrm{I}R_x$尚无力作深入探讨，只须指出，$\mathrm{I}R_x$是个深一层次的“空间”，自然不再是介观意义下的欧氏空间了．因此在介观的欧氏空间（或说牛顿空间）意义下，$\mathbf{R}\times\mathrm{I}R$仍只是一个一维空间，但已不只是空间$\mathbf{R}$，而是其扩张，所以我们说这时的“丛”正是${}^*\mathbf{R}$在复数意义下的又一表述，亦即有

$$(\mathbf{R},\mathrm{I}R,\pi^{-1}) = {}^*\mathbf{R}$$

如图 11.8 所示．

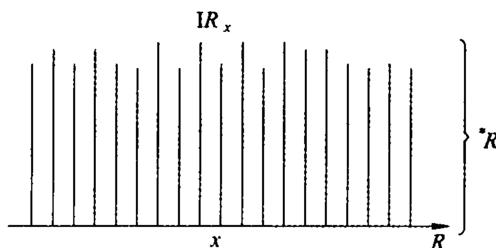


图 11.8

3．复单子的一个数学模型

对$\forall x_0 \in \mathbf{R}$，有复单子$N(x_0) \in {}^*\mathbf{R}$．再设$\varepsilon \in \mathbf{R}$，$\varepsilon > 0$为参变量，以$x \in \mathbf{R}$为自变量，记分段函数

$$\sigma(x_0;x) = \begin{cases} x_0, & |x-x_0| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \\ x, & |x-x_0| \geqslant \varepsilon, \exists\varepsilon > 0 \end{cases} \tag{11.7}$$

再取算符“$\odot$”满足

$$\sigma(x_0;x)\odot * = \begin{cases} \sigma\odot * = x_0\odot *, & |x-x_0| < \varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \\ \sigma\cdot 1 = x, & |x-x_0| \geqslant \varepsilon, \exists\varepsilon > 0 \end{cases}$$

其中$\odot$表$*$落在点x_0邻域内．从而有模型

$$\sigma(x_0;x)\odot\xi_{x_0}\exp\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon-|x-x_0|}{\varepsilon}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{|x-x_0|}$$

$$=\begin{cases}x_0\odot\xi_{x_0}\exp\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{|x-x_0|}{\varepsilon}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{|x-x_0|}, & |x-x_0|<\varepsilon,\forall\varepsilon>0\\ x, & |x-x_0|\geqslant\varepsilon,\exists\varepsilon>0\end{cases}\tag{11.8}$$

其中ξ_{x_0}为模小于 1 的随机的参变量；指数函数的指标

$$\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{|x-x_0|}{\varepsilon}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{|x-x_0|}$$

是$^*\mathbf{R}$丛中一个截痕，示意于图 11.9．当x愈靠近x_0，其虚性表现愈强，加上ξ_{x_0}的作用，这时模型（11.8）即表明单子$N(x_0)$或说$\mathrm{I}R_{x_0}$中多种特征以及量子中的无规运动和多种特征．愈近x_0，这些特征表现得愈强．

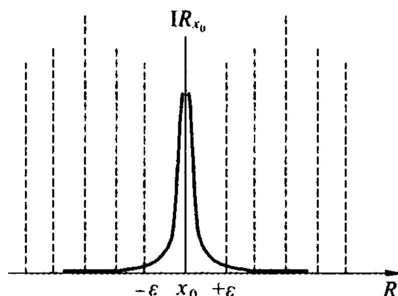


图 11.9

由此看来，式（11.8）能够较好地同时描述单子$N(x_0),\forall x_0\in\mathbf{R}$的无穷小和量子特征．特别当式（11.8）中$x$落入$N(x_0)$，据第三节、二、1（3）可知，

$$|x-x_0|=|N(x_0)|\ \text{（“}|\cdot|\text{”表量化映射）}$$

为同一个无穷小量，这时截痕（函数值）在$N(x_0)$内为无限高．

三、无穷小认识的应用与芝诺悖论解释

1．应用简述

现在再回过头来看第二节、六中“病态数学”例，即更为清晰了．比如，对于 Peano 曲线，为什么一方面说P_∞-曲线“充满”了$D=[0,1]^2$，另一方面又说它

的维数不是2?

原来这个"充满"仅是在"稠密"或说"遍历"的意义下来说的. 为说明这点，先考虑$P_n \subset D$，n充分大. 因此，如图11.10所示，将D中第$D_{ij\cdots n}$小块放大来看，设这时P_n经过$D_{ij\cdots n}$两次，任取一点$x \in P_n \cap D_{ij\cdots n}$，及其在$D_{ij\cdots n}$中的无穷小邻域$N(x)$，则记

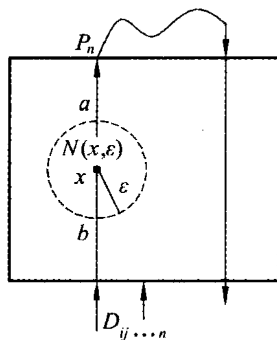


图 11.10

$$N(x) \cap P_n \approx (a,b)$$

为一维的无穷小. 显然，当n任意大时，$N(x) \cap P_n$皆只能为一个一维"段"，而不能有两个. 因据极限概念，若P_n折线间的距离进入无穷小，已经意味着取了极限，从而两线合一了. 同时根据非标准分析概念，一旦两线间距离无穷小，就意味着重合了，所以在$P_n \to P_\infty$过程中，恒有

$$N(x) \cap P_n \to N(x) \cap P_\infty \equiv (a,b)$$

这就是说，邻域$N(x)$在D中是二维的，然而在$P_n \to P_\infty$过程中与P_n的交始终是一维的，这就解释了所谓"充满"的特有意义. 也就是说，在其中一维上是连续统，在另一维上只是稠密，从而不是不可思议的了.

同样用无穷小邻域概念去观察其他极限论意义下"不可思议"的"病态"例，都能作出"直观"的解释. 从而既能捍卫病例的正确性，又能解除对它们的迷惘，也体现出真正的无穷小概念与极限概念是有区别的.

2. 芝诺悖论的解释

推广无穷小邻域概念并应用第五节动邻域和趋势邻域概念，可以对芝诺悖论作出一个明晰直观的解释，它与非标准分析中内集论（第三节、二）作出的涩口的解释是相容的.

简单讲，芝诺悖论说"飞矢不能达的，静矢不能起飞"，现分别解释如下:

(1) 所谓飞矢不能达的.

如图11.11所示. 设有一矢在实空间T上自t_0飞往t'，现飞到了$(t, y(t))$处，速度为$\dot{y}$，因此它必有非$\varnothing$的动邻域，如图中πD. 这时芝诺"导演"说镜头停止，先来分析一下: 矢为要从t到t'必先飞到t_1，为要自 t 至t_1必先到t_2，为要到t_2必先到

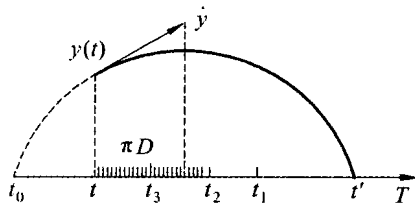


图 11.11

t_3……，于是问题出来了．据第五节中分析知识知，对于动态系统$(y,\dot{y})$来说，它不仅仅是T上的问题，即使在动点y处也还有一个(t,y)空间以外的空间——运动时空，在这里即表现为速度$\dot{y}$及其覆盖域（按第五节、三，应记为$D(y,\delta(\dot{y}))$），它表现在t点处即$t\times\pi D$，πD是$D(y,\delta(\dot{y}))$的投影（见图 11.11）．因此影子πD不属于T空间，它不受T空间的操作，那么芝诺的错误则是无视πD的存在，没有认识到箭自t_0至t'是个超T空间问题．因而他在对$[t,t']$作分割时，当分割点进入πD内即无效了，因πD是整体，是非T空间的对象，不接受T空间的分割．

反过来说，若πD按芝诺指意，当分点进入t_3时，πD只得缩小（降低速度）以不超过t_3．这样一来，实质上是说在t_i步，矢只能以t_i为目标来飞．如图，当$i\geqslant 3$时自然更要减小速度以使动邻域缩小才行，否则即要"冒进"犯规．这一来在$t_i\to t$的过程中t的动邻域πD只得随之萎缩至 0，而动邻域为 0 即意味着取消飞行．但请注意（第五节、三注），按动邻域的定义，πD是t刻飞矢能独立飞行的起码距离，那么芝诺有什么理由让飞行中的矢按他的指意将自己内在的、连自己也不能控制的πD逐级减小至 0 呢?

总之明白了，原来是芝诺犯了概念错误，即把一个实质上高维空间问题（或说高维空间"投影"到低维空间的问题），看成低维空间内的问题了．或说，芝诺没有看出"动"或"动机制"这个具有额外空间实质的"幽灵"，被捉弄了．

（2）所谓静矢不能起飞．

此意是说对于静矢，即使给它张上满弓也不能将它射出去．然而这时它正好违背了第五节、三中$D(x,\delta(w))$的情形．因这时矢同样有个动邻域，具体叫做"趋势邻域"，其定义是一旦让其运动，它将能独立地（内在的）运行一定距离．因此，这时不允许"芝诺分割"无限进行下去，否则当分割到趋势邻域时，则是对矢的外加限制，破坏了基本公理，违背了前提条件，因而不屑一驳．或者说，完全按（1）理即可破之，此略．

注：内集论（第三节、二）对芝诺悖论的解释大意是，它经过诸如实体、内集、ε-分块等多层概念的引入，终于得出$\mathbf{R}$是个所谓"*-有限集"，从而说明在此"有限"意义下，"芝诺分割"不可能无限进行下去．这与本节的"动邻域存在，不允许任意分割下去"具有同一实质，但后者更为直观，皆因引入了"动"机制、"动邻域"和有关概念．

第十二章　数学的二象机制揭示

在第四章，特别是其第四节专门介绍了“二象系统”中有关的基本概念，并在此后的各章叙述中，一直带着“二象系统”意识．那么，本章即要在此基础上汇总性地作一综述，以揭示出整个数学这棵参天大树从主干到各个枝端都深刻而内在地、本质地存在着一种共同的、基本的“二象机制”．

所谓“**机制**”系指（研究对象的）一种“内在动力”，系本原性问题．由于这种机制的揭示不是个数理逻辑的推证问题，因此只能用观察、举例、归纳的方式作思辨性认识．

下面将（归纳前面述及内容）指出从数学中的数系、函数空间到数学模型都根本性地存在着这种“二象”机制．特别还据此“二象”观揭示出函数中参数及参数空间的本质；指出极限论存在的“局限性”等．最后提出一个“猜想”，作为“数学基础”根本任务的实轴结构（连续统）认识，其困难的关键仍在于实轴的“二象”结构机制未得到正面的承认．

如果数学能正视其“二象”实质并提升到思想理念上来，有意识地从“二象”角度去促进数学开发，将是十分有益的．

我们之所以放到这最后部分来叙述，是因为这时所谈到的各个方面内容都是大家熟悉的了．也因为是大家熟悉的，所以用不着更多解释而可以说得简单一些，因此本章规模并不大．

之所以作为一章来叙述，一是因为其内容的重要性，二是因为其内容的独立性．由于本章规模小，将不再分节而只作为八个大段来述出．

一、二象系统论简顾

为了本章内容的完整性，也鉴于第四章第四节叙述已较详细，这里只需简述且将（相对于彼处）采用另一种方式来叙述．读者既可以仅此读下去，又可以与第四章作出比较，以对二象论得到进一步理解．

1．基本概念

客观世界任一“对象”，只要承认（或关心）它的内容，它就是一个“系统”，

仅当把它作为“质点”看待时才不是系统．因此说系统概念是最为广泛的．探讨通有系统共同规律的科学叫做“系统科学”．

具体说，任一系统都是由具有同生同灭、互相印证、互为生存条件的“虚、实（或叫软、硬）”两个方面构成的．分别将此“虚、实”两个方面叫做“虚象”和“实象”，又叫做虚空间和实空间．当从这一“虚、实”二象角度去考察系统时把该系统叫做“**二象系统**”，把这一理论叫做“二象系统论”．

借此“二象”思想可使一般系统概念得以深化，叙述为：当一个**元素组**（X）存在共同**目标**（Y），且围绕着目标 Y 而发生着**关系**（F）时，此“三元组”$(Y;X,F)$ 成为一个**系统**．

对于同一系统（S）可有**两种描述**方式：

一种是**集合式**（又叫空间式）：

$$S=(Y;X,F) \quad 或 \quad S=(X,X^*)$$

后者是二象空间式（X^* 表实象 X 的虚象）．

另一种是**分析式**（又叫函数式）：

$$y=f(x,a),\quad y\in Y,\quad x\in X,\quad a\in X^*$$

上述“二象”概念只是一般系统的基本结构形式，对于一个复杂系统往往是由多个“不完全”的二象结构构成的“复合二象”结构．

2．基本性质

“二象系统”概念既表明了“二象”结构是客观世界的一种普遍而基本的存在，也预示着“二象”理论是个相当宽阔的研究领域．比如，它的如下诸性质就是一些值得深入探索的领域：

性质 1　相对说来，虚象空间与实象空间之间无一一对应关系．虚空间每个元素都是相应实空间的一个整体映射（一种抽象），或说是实象的一个具有泛函特征的映射．

换句话说，二象间具有空间实质的（层次）差异，比如当实象属物质空间时，其虚象则可以是函数空间、“对偶空间”、“超空间”或至少是具一定抽象性的空间．

性质 2　虚、实二象间总处于既对立又统一或既竞争又合作的状态，叫做“对立统一”性或“对偶”性．

性质 3　虚、实二象间具有“互补”性，即双方是互相匹配的，任何一方都不能缺失或缺乏，否则系统是“破缺”的．

性质 4　虚、实二象间具有“互动”性，即任一象的“改变”都将内在地引

起其对偶象作相应改变. 这种"改变"源可以来自内在（如动力系统的初始条件或"遗传基因"等），也可来自外在（如管理控制、随机干扰、非随机干扰（持续性干扰作用）等）.

性质 5 虚、实二象间及其"对立性、统一性"间皆具有一定的比例关系，且其比例值皆具有一定的"柔性". 比如，以"对立、统一"性为例，即可形式地记为

$$\text{对立}:\text{统一}=a:b=r\in(1-\delta,1+\delta)$$

正数δ适当小. r的这一适度可变性叫做系统的"柔性".

注：（1）注意到这里诸性质在第四章第四节是出现在系统定义之中，那是以"公理"的形式出现的，无须证明. 而在这里则是以"定理"的形式出现的，需要证明（当然，也可以作为"定律"来叙述，则只需观察说明即可）. 我们猜测它们都是可以作为定理来证明的，甚至可能开发出深刻的理论领地来.

（2）在"二象系统论"中对于上述诸性质，随着叙述方式的不同，还可以在不同的规范格式下作研究. 比如，可有"定性语言"和"定量语言"两种不同的叙述方式. 显然，前者只能用于定性的、思辨式研究. 要做定量分析则必须用"定量语言"或说必须叙述成"定量"的或叫"形式化"的. 以上叙述方式只能说是"定性"的.

亦如科学的一种共识，"任何理论，其思想在前人那里都能找到踪迹"，二象系统论也不例外. 事实上，可以说在几乎所有科学中对此都有所研究，只是彼此的角度不同、层次不同，且相互处于孤立、平行、零散的甚至是"无意识"的状态罢了. 比如，在物理学中有以光子的"波、粒二象"为发端的研究（注：尽管是物理学家首先认识到"二象"机制，但似乎现代微观物理前沿的争论仍属（深一层）"二象"之争. 可见，"二象"意识还有待形成.）；哲学中有以"对立统一"为中心的辩证论研究；东方哲学中有太极图"阴阳论"研究等的研究.

特别在数学中体现得更为深刻，这也正是本章所要论述的. 其实也不难理解，这是因为（以二象结构作为基本特征的）客观世界原本就是数学的背景空间的缘故.

当我们树立起"二象论"理念后再来看既有的数学时，就会有一种居高临下的感觉. 不管是从数的角度、空间角度、函数结构角度，还是从数轴结构角度来看，都是如此. 比如，这时当看到既有的数学多是建立在实象（比如实域、实空间）上时，就能对它有了一种更为深刻的理解了.

具体说，本章将首先从数（数系，见"二"）与形（空间，见"三"）及其结

合（函数，见“四”）等几个大的方面去揭示数学的“二象”机制，然后从数学最为根本的“数学基础”——实轴结构探索中去认识这一“二象”机制（见“五、六”），依次叙述如下.

二、数系的“二象”性

1. 复数域的“完备”性与“二象”性

已知，复数是由虚、实“二部”构成的“数”，却因此能构成颇具威力的“**完备**”数系. 原来其机理正在于，它的“二部”正好从数的角度反映出了客观世界(在一定层次上) 的一种“二象”机制. 这时（在数的意义下）许多在实域（单象）中难以解决的问题拿到“复域”中去即可解决了. 远的比如欧拉公式的证明、代数基本定理的证明以及傅立叶级数、闵可夫斯基空间的效力等；近的比如 2006 年菲尔兹奖得主之一的 W · 沃纳解释物质“临界状态”的成功等，都在于纳入了“复域”的结果，以致理论物理学也说“上世纪理论物理的伟大发现是复平面”.

2. 复数中“实部、虚部”对应着运动的“平移、旋转”实质

首先说，这一特征正好使得复数对应着客观世界中“完全运动”(平移加旋转)实质. 对此，在“二象系统论”意义下（虚实二象是客观世界的基本存在）即不难理解了.

同时，在二象系统论意义下还揭示出，“旋转”相对于“平移”来是个具有空间实质性差异的改变. 这点是非同小可的，它预示着旋转意义下存在着更为深刻的理论，值得去探索. 的确，比如相对论时空中的时间维即表明了这点（仅说时间具有物质性、也是一维空间等还不够，还应该看到它特有的空间旋转性实质）.

3.“二元数系（Abel)”理论反映的“二象”性

“复数”系所体现的还只是在数域上的威力，Abel 更将其推广到了一般元素的“二元数系 (x, y)”情形（这时二元 x, y 可以是一般对象，数只是其特例，但是二元间必是虚实关系，绝非二维向量中两个分量间的“平等”关系）. 同时，还证明了所有二元以上的“×元数系”中仅存在四元数系，且其功能已十分有限了.

那么，在二象系统论意义下已能理解，那是因为客观世界的基本存在是“二象”的缘故. 反之也可以说，Abel 理论也是对“二象系统论”的一种支持.

总之，上述事实表明，复数系、超复数系中乃至广义超复数系中都基本地存在着这种“二象”实质，并非偶然.

三、数学空间的“二象”性

这里“空间”有三层意思：① 是对直观意义下的“欧氏空间”．一方面由于这时（在坐标意义下）数与形的结合已达等价地步，所以其“形（欧空）”的“二象”实质可在“二”中得到理解．另一方面，欧氏空间情形可作为②的特例去得到认识．② 是函数意义下的“抽象空间”．这是本段的重点，着重就抽象空间中对偶空间的“二象”性作一观察．③ 是超越意义下的“深层次空间”，也是相对于介观空间来说的深层次对象的“二象”结构讨论，留到“五、六”段．

1．关于对偶空间反映出的“二象”性

首先说，关于“对偶”可有两个含义：一个是指**空间**的“对偶”（又叫“共轭”），即两个不同层次的（或说具有实质差异的）集合间的关系；另一个是指**机制上**的“对偶”，即既对立又统一的关系．

在数学中多是指前一种（空间的）“对偶”，且即使在这一意义下仍（在多个学科中）存在着多种对偶或共轭概念（从这点也能说明数学中普遍地存在着“二象”机制）．

比如，若记线性空间为 X，则其对偶空间为 X^*，

$$X^* = L(X,K) \text{（}X\text{ 的系数取自数域 }K\text{ 的所有线性泛函）}$$

这时容易根据“一”中性质 1～5 检验出 X, X^* 之间是典型的“二象”关系．

又如，对于一般线性函数（线性系统）

$$y = u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \langle a, x \rangle, \quad x \in X, \quad a \in X^* \tag{12.1}$$

也可看出 X, X^* 之间的对偶空间关系．同时，这里所记 $a \in X^*$（表线性泛函值集），其含义也是深刻的，因为它也是所谓“Riesz 表示定理”思想的一种体现，却也是“二象”性在线性函数中的体现．

特别地，当把 X 的对偶空间（线性泛函值集）X^* 投影到实轴（记为 K）上时，式（12.1）就成为线性空间中一个基本表达式．换句话说，线性空间无非“加群”与“二象”关系的结合．

又，悉知群、环、域只是些纯集合（纯实象（单象））上的运算，所以其内涵和机制较弱，相对说来，比如模、体、代数、线性空间等的运算机制则具有了“二象”结构，所以其内涵十分丰富，能生发出空间来．

从这一意义即可说，诸如度量空间、Banach 空间、乘积空间、 Hilbert 空间等，无非是其“二象”机制的更加**深化**、**精细化**表现罢了．包括张量分析中协变

张量与逆变张量间（在多重线性泛函意义下）在内的对偶关系，仍然是个典型的“二象”关系.

2．上述讨论中的“线性”条件并非实质性的

这就是说，在既有的数学中，一般用到“线性”条件的地方往往只是为其“漂亮”结论的需要．一方面应当承认，当其结论被推广性应用或被广义化后，其线性条件往往是可以去掉的．同时亦当看到，当其将数学结论上升成思想（定性化）后，一般也不必强调其线性性了．

总之，从思想上来说“线性”条件往往是可以突破的、可以推广的．反过来，所谓“非线性”也是以“线性”为特例的．

比如对于式（1），从思想上即可一般地表述为，对任一客观系统空间（仍记为 X）皆有其对偶空间 X^*(X 的所有泛函（式或值）之集)．对应到实践中，比如任一客观系统及其属性空间的关系乃至经济学中商品经济与金融经济的关系，皆典型地满足于这里 X 与 X^* 的（不只限制于线性空间的）二象关系.

事实上不难理解，既然数学的背景空间是客观世界，而真正的客观世界总是非线性的（线性往往是近似、是简化的结果)，所以即使数学（目前能力）只达到线性，我们的思想也不应该止步于线性.

3．系统空间与数学的“二象”性

将再次看到（“四，1”）任一数学模型都是个典型系统；而任一系统 S 皆有个由其虚实（象）空间构成的“完全空间”（$S=(X,X^*)$），又叫“完全系统”．由此足见，数学中空间的多层次性及层次间的“二象”性．例如，度量空间、乘积空间之类函数空间就是由两个相互对偶的空间构成的“二象”结构．特别地，比如控制论、博弈论（属双边控制型）等数学分支，也是系统虚实空间之间的互动过程，因此也是数学空间中的“二象”性表现.

四、一般函数中的“二象”性

1．关于函数中参变量的实质

皆知，任何函数形式的数学模型都有其参变量（至少是具体取定的参变数)，并且在数学中专门针对参变量作分析的内容和成果都不少．比如突变论、动力系统状态空间讨论、常微分方程几何理论、张量分析中逆变张量的讨论乃至控制论等，都具有讨论参变量的特征.

但若要问，**模型中参变量及参变量空间的实质是什么**？数学中并没有给出正面的回答．不过笔者认为回答这一问题不应该是数学的任务，而应该是系统科学的

任务.

那么,"二象系统论"则是从二象系统角度完全回答了这一问题,从而也进一步显示出"二象"机制正深刻地存在于整个数学中.为进一步揭示函数的二象性,再看系统定义:

2. 再说系统的一般定义

在"一、1"中界定一个一般系统的基本思想:

如果把一个(通常意义下所说)系统涉及的整个领域叫做**完全系统**(记为 S),则 S 是一个如下的"空间三元组":

$$S=(\text{目标空间};\ \text{元素空间},\ \text{关系空间})\sim(Y;X,X^*) \tag{12.2}$$

这时不难根据"二象"定义或其性质 1~6 验知,其中 X 与 X^* 之间就是一种"二象"关系.至于式中分号";"左侧 Y,式中"="号表明,它是与右侧——"二象"结构等同的.

进一步,通常所说"系统"则是一个如下的"一般三元组"(记为 s):

$$s=(\text{目标};\ \text{元素},\ \text{关系})\sim(y;x,F) \tag{12.3}$$

解释为"元素 x 为着共同的目标 y 而发生着关系 F".易看出式(12.3)与式(12.2)有关系:

$$y\in Y,\quad x\in X,\quad F\in X^*,\ \text{或即}\ s\in S$$

特别地,所谓对(客观)系统建模,实际上是将系统(12.3)"形式化"为函数式:

$$y=f(x,a),\quad x\in X,\quad a\in X^* \tag{12.4}$$

可见,数学中一般函数式都是个典型的系统,反之亦然.但须注意,这时数学模型(12.4)与(表示真实客观系统的)集合形式(12.3)或式(12.2)的关系是映射像与原像的关系;是技术实现与客观存在的关系.这是因为数学模型具有近似性,这种近似性是由技术处理造成的.这一技术处理在这里即表现为式(12.3)中关系 F 在式(12.4)中成为表示宏观结构的关系 $f(\cdot)$(以下记为 f)和表示微观关系的系数 a,即有

$$F=\{f,a\}$$

其实还应该看到,这时式(12.4)中的 X 和 X^* 已(随建模过程而)被界定,因此也只是"近似"的了,只是这里没有(也不必)区别表出.

那么,这时函数中参数的实质即可得到解释了(见下段).

3．参变量空间即系统的虚象

由形式系统（12.4）与客观系统（12.3）（或（12.2））的关系即知，首先，形式系统（12.4）的左右两端由“＝”表明，它们是等同的，因此只需看（如）右端即可．这时，式（12.4）表明，在同一目标 y 下，当元素间宏观结构 f 确定，则自变量与参变量之间即表现为一种**狭义的实象与虚象**关系了．

又，由于同一系统即使在同一目标 y 下，其数学模型也非唯一，这时随 f 的不同选择（记为 f_i），式（12.4）中 X, X^* 也将不同（记为 X_i, X_i^*），则易证当取其并时（仍记为 X, X^*），有

$$X=\bigcup_i X_i,\quad X^*=\bigcup_i X_i^*$$

这时的 X（实象）、X^*（虚象）即典型地表现为（客观系统）自变量空间（实象）与参变量空间（虚象）之间的关系了．

也就是说，一般函数皆本质地具备着客观系统的“二象”机制，同时也揭示出一般函数中参变量的虚象实质以及参变量与自变量之间的本质差异．

五、“几何点”的“二象”结构

共识，数学的根基在于对实轴结构的本质认识，其根本就是“几何点”的本质探讨问题．

1．应该从一个新的层次上去认识几何点

在今天，从更深层次终于能看出，过去认为几何点是“没有大小只有位置”的“点”观念是有局限性的，值得再度审视．

简单说，那只是一种直观意识下的认识．过去，它原则上只在处理以介观空间作为背景空间的对象时（包括微积分学及其极限论，见“4”）尚能过得去，但在“基础数学”中需要本质地认识实轴结构时即显出局限性了．

尽管说这时仍不能肯定问题一定出在“几何点”概念上，但近现代以来的科学，包括物理学和数学本身产生的系列（如下 2、3、4）实事，不能不启发我们对它产生质疑．当然，这也是站在“二象系统论”角度对它提出的质疑．

2．来自物理学的启示

如果承认实轴结构是等价于客观世界一维物质根本结构的（这里所谓“客观世界”系指大自然的本原而不只是目前物理学认识到的这些），那么目前物理学对物理空间微观世界的探索及其成果，对“数学基础”直接（或说正面）地探索实

轴结构（而不仅仅是通过极限去探索）是颇具启发意义和借鉴意义的．比如，微观物理学表明：

(1) 任何粒子都具有（波、粒）“二象”性，并且随着考察对象的逐步增大，其“二象”性仍然存在，只是这时的“粒”性将逐步增大而“波”性在相对缩小罢了．那么，再将粒子继续减小直至“几何点”时，其“二象”性又将如何呢？鉴于物质由宏至微的整个过程中都保持了“二象”性且波性权重在加强，则用极限思维（这时是可以的）可知，当物质（粒）缩小到几何点时（亦即极限点时）仍应有其“波”象存在，它既是该几何点的无穷小邻域，又与该几何点的“粒”性（实在性）具有质的差异．

(2) 物理学表明，物质的空间结构愈到微观，其空间特征（比如空间维数，甚至逻辑特征等）愈要改变．比如，现代微观物理学中所谓*D*-膜、*K*-膜和卡西尔效应、黑洞本质等，其实都是“二象”实质的反映，乃至“弦论”揭示出的“11维空间”实质上也是“二象”空间的一种技术性体现．这些都启示我们，由于实轴的微观相当于一维物质空间的微观，因此实轴的微观结构表现出“复杂性”也是可理解的．比如这时，在实轴的“微观”上，其空间特征及其逻辑特征都可能有改变，这时即不能继续用介观世界的实数度量观去理解深层的实轴结构了．

3．再谈非标准分析的突破

悉知（第十一章第三节），非标准分析的关键突破在于其“鲁轴”模型 $^{*}R=\{\langle x\rangle : x\in \overline{R}\}$ 及其中的“单子” $\langle x\rangle$ 概念的引入．

首先看到单子 $\langle x\rangle$ 是个以几何点 x 为实象、空心单子 $\langle x\rangle\setminus x$ 为虚象的一个二象结构．这是超乎人们直观的，是对传统几何点概念的来自“空间意识”上的“二象”突破．相信初见于此的人，无不为这一“单子”所吸引，尽管鲁滨逊是以定义（公理）形式给出的，不便（也无须）追究其思想渊源，但通过对实轴结构作一番思索而略有所悟之后，则无不为鲁氏的深邃思想所触动．

进一步问，为什么由“单子”生成的非标准分析能“顺便”地重建起微积分学而且还能（比极限论）走得更远？显然，这正说明突破传统几何点概念的“单子”概念不仅具有正确性而且来得更为深刻，因此它的意义不只在于（介观意义下的）既有理论和成果．

此外，作为非标准分析新分支（E. Nelson 创立）的“内集论”之所以在破解芝诺悖论上获得成功，也在于最终把问题化归为“类单子（内集）”情形而成．可见具有二象结构的“单子”概念是何等基本．这自然也是对（遭遇现代困惑的）数学及其“几何点”的古典概念一种新的启发．

4. 极限论对“无穷小”认识的不足

已知，极限论在奠定微积分理论上起到了决定性作用，似乎它已经完全解决了人们对“无穷小”等微观结构的认识问题，但在进一步用到实轴微观结构的探索时，即无效了（甚至产生诸如 Peano 映射、“点点连续点点不可导”之类玄谜）. 为什么?

现在已不难看到，原因仅在于极限过程是凭借有限形式下的变化趋势（规律）“跳”到极限点上去的，而它所“跳”过的部分正是极限点的无穷小邻域，因此极限论实际上只是从介观意义上对无穷小作出的一个方面的甚至是较为肤浅的一种直观认识，更谈不上对无穷小的全面认识了.

然而对实轴结构认识（或说连续统认识）的关键在于对实数（几何点）作全面认识、本质认识、正确认识，而不容许“瞎子摸大象”式地认识.

这时对传统的“几何点”概念即提出了质疑和挑战.

非标准分析已表明，一个完全的几何点概念还少不了它的“无穷小邻域”结构，这是不可回避的. 然而极限论正是跳过了该邻域（虚象）仅只承认了几何点（实象），因此其功能十分有限.

总之，结合极限论的不足和非标准分析的成功我们得到启示，应该从更高层次、更完全的空间观念去理解几何点才是. 同时也已得到启示，几何点也应该具有“二象”性结构.

六、实轴结构的“二象”性

由系统概念的广泛性知，对实轴上任一点，当把它看做是有内在结构时，也是个系统，因而也有其二象结构. 这一来即可见，二象论在实轴结构认识中也是有其地位的.

的确，带着“二象”意识看去，数学几千年来的内容可以说大部分都是在实轴（实数集）上进行的，并且尽管直接对实轴（实数集）的认识也已十分丰富、十分深刻（诸如其有理数、无理数、超越数集及其稠密性、完备性等等），但只有在 20 世纪初才深入到触及其根基的层次——需要“身临其境”地去正面认识实轴的微观结构. 这时才意识到，过去的种种认识可以说只是站在“景外”获得的，现在之所以遇到实质性困难势在必行.

本段将通过对实轴的度量认识过程回顾，最终指出，问题的关键仍在“二象”机制上.

1. 从实轴的度量困难谈起

皆知，一切度量值（包括工具度量、公式计量、泛函估量等）都是将度量对象（包括物质对象和非物质对象）映射到实轴上一个几何点及其坐标位置的一种表现. 这是个把非数的客观对象转化为数的（映射）过程，必然具有人为性或叫技术性，因而严格说来必然具有技术误差，这是实事. 那么，当被度量对象就是实轴本身而要求绝对精确时，或说当要求把实轴上任一几何点的坐标位置严格表示出来时，会怎么样呢？显然，这时问题已变成“实轴到自身的恒同映射”了. 那么，这时遇到的已不是“技术误差”问题，而是转换成了实数表示的“技术困难”. 同时，这一困难也是实质性的.

亦即在现有实数表示法下是不可能把实轴上任一有限点的位置（即其长度）用**有限形式**的数值表现出来的. 这里“有限形式”即使广义化到包括所有有理数（字）和已知的代数数（式）及已知的超越数（符）等，仍难以完成这一“实轴度量”任务. 比如，任给一个实数，其最靠近的一个实数是什么，几千年来数学也未实现过一例. 正说明这里存在一个本质性困难.

进一步说来，仅用现有的“实数度量观”去完全地表出实轴上的比如[0,1]段上所有数是不可能的，那么这是为什么?

2. 实轴结构被揭示与实数集被表示的等价性

把能够用任何有限形式将实轴上所有点表示出来，叫做得到了严格的实轴度量，而“严格的实轴度量”意味着“实轴结构得到认识”. 反之，“数轴结构得到认识”意味着实数集能够用有限形式表示出来.

不过，即使赋予这里“表示”和“度量”以广义含义（即只要是能用有限形式表示且不必只用实数去表示皆可）仍然不行，因此说必须有一种新的、本质上创新的表示法才行.

那么这时数学采用的创新在于改换了一个方向——从集合论角度去进取. 这就是产生自 20 世纪上半叶的重要分支学科“公理集合论”. 不过仍有:

3. 公理集合论的困惑及其实质

实轴的“表示”当其从度量角度受阻后，虽然转向了“公理集合论”但仍不行. 至今也经历了近一个世纪，竟然连其“公理系”也尚未建立成功. 那么这说明了什么?

首先，它说明用既有的“实数度量观”去认识实轴结构与从“集合论观点”去认识实数集（连续统）结构，存在着同级别的也就是共同的一个根本性困难未被突破.

其次，它说明为要正确“表示”实轴，必须还要有新的突破．那么新的突破口何在？

基于“二象观”，再较之**数理逻辑**中的元素仍保持着（实数机制认识的）传统观念这点，可提出一个**猜测**：也许问题正出在它的元素或“点”概念中忽视了“二象”实质．

因为在真正的“微观世界”，其空间特征（从而其逻辑特征）较之介观空间来，应该有所改变．根本的是空间特征的改变，逻辑仅属于物质空间的属性（虚象）．因此也说，公理集合论遇到的直接困难虽然在逻辑，但根本的还在其“几何点”的空间实质认识上．

正如“5”所说，“几何点”不应该只是直观意义下（保持着介观空间中的过程）缩小至0的点，而应该意识到在此过程中空间实质也在改变，已深入到又一个空间层次了．诙谐地说，这时观察者应该随之变成“点中人”而不应从“点外人”角度（保持在原有空间）去作观察．

也就是说，本质上实轴并不那么“实”．实轴作为连续统并非只由对应着物质的“粒”（实在）性这一面构成，而是同时还应该有个对应于“波”（或场，虚拟）的一面才行．

4．比较与启示

首先，举出已述及的三个难理解的现象：① 对任意两个有理数 a,b，则 $a+\dfrac{a+b}{2^n}$ 对任意 n，皆系 a 与第 $n-1$ 个有理数之间的有理数，可是它不包括极限情形，从而不会进入极限点（这里即 a）的无穷小邻域．从这一意义说，它只是有限的状态．恰好，这个未能取到的极限状态正好像两个稠密点之间有个“缝隙”，但这又与“稠密”性矛盾，实难理解．② 对“有理数无限稠密与有理数不可能充满实轴”这点，在直观上仍不可理解．③ 对“极限方法之于实轴结构认识无效，说它的最后一步是“跳”过去的”这点，也难于直观理解．这些都是为什么呢？

其次，举出也是已述及的三个既有的事实：① 非标准分析中“单子”模型及其理论，是严格符合逻辑的事实．② 物理学已证实“微观世界的空间特征会改变”，这是实事．③ 实数理论中已得知“有理数集仅具0测度，无理数集的是全测度”，这也是实事．

那么，比较“三个难理解现象”与“三个既有事实”得到什么启发了呢？

首先说，“既有事实”说明“难理解现象”也许是假象，其中应该有更深层的问题还没有揭开．

进一步说，它也启发我们，微观世界也许有其新的空间特征．比如，可看出

“三个难理解现象”之难皆出自过程中的观察者“无意识”地保持了同一个空间概念.

看来正如所述，“任何科学的前沿都是哲学”，数学也不例外. 也就是说，数学需要树立“微观世界具有另一种空间层次”的哲学理念.

5. 实轴的“二象”结构猜测

那么，在上述启示下，实轴的微观世界的空间特征是什么？我们有如下的实轴“二象”结构猜测：

猜测 1：“实轴仅由有理点集和无理点集构成及有理数具有稠密性”的说法仅具直观的空间意义. 实轴是个以有理数为实象、无理数为虚象的“二象”结构. 由于其虚象（相对于实象来）具有空间的超越性（与实象具有空间实质差异，属于一种深层次空间），所以（直观看来）它仍然属于（实则涵于）一维空间. 在此意义上或可说，有理点集是具有无穷小“缝隙”的稠密点集，无理点集则是充斥于有理点集间的无穷小“缝隙”的并构成了一个个（以**有理数为核心**的）“单子”的邻域.

七、数学的“二象”机制猜测

1. 猜测的引入

根据上述分析不能不意识到：整个数学领域，包括其数与形、结合数和形的函数乃至更深层次的实轴结构等，基本上都存在着一个“二象”机制. 尽管说数学的过去（和将来）可以在其“单象（实域）”上进行，甚至说大部分内容都是在其单象上完成的，但仍掩盖不了“二象机制才是基本和全面”这一本质. 特别在遇上困难及在攻关时更应意识到这一“二象”机制，以提高观点、扩大视野.

如果说过去数学的“二象”成果是在无意识下自然呈现出来的，那么今后对数学作有意识地“二象”开发无疑更是十分有益的.

猜测 2：归纳数学中上述从多个方面得到的“二象”机制，猜测“二象”机制是整个数学科学中的一种基本存在.

2. 猜测的解释

“二象”机制的存在是多层次的. 比如，复数的二象结构（从本质上说）仅是在介观空间层次（及其逻辑）下的“二象”揭示. 在超越这一空间层次时（宇观、超微观），空间特征及其逻辑都将有所改变，因而（由逻辑决定的）数学也应该有所改变才是.

那么，该怎么变？首先说，至少在介观世界尚可“单象”进行的研究方式，在此超微观下即不可以而又需要有其新层次的“二象”揭示了．但这样的“应对”方式不是根本手段，而应该是“只需从数学的基本层次上去引入‘二象’机制”．具体说是：

首先建议在探索实轴结构（连续统）的“数理逻辑学”中，需要把谓词的变元“二象化”，即将其视为具有虚、实结构的变点．

其次建议将集合论中集合的所有基本元素都“二象化”，即将其所有“几何点”（集合元素，实象）皆赋予一个虚象（类似《单子》的场）．

显然，要在数学基础上实行“二象化”是件非同小可的事，需要更多实证性、创造性工作，这里仅仅是个猜测、是个思想．比如，如果这样，必将对数理逻辑的一些基本问题产生影响，需要来个重新梳理．同时在公理集合论中，其公理及公理系皆有可能需要重新审理和叙述．这时需要的工作仍然是深刻而复杂的，但却是更有希望的．

此外，根据上述分析，建议在数学中既有的复变量分析、参变量分析、非标准分析、二元数分析等基础上进一步结合“二象论”的思想进行深化．亦即在既有的“二元数”分析中既要赋予二元不只是数，又要赋予二元间具备虚、实二象的特征．把在此基础上作出的数学探讨叫做**二象数学**．相信在“二象数学”中将有比复数系更为宽泛的完备性特征．

3．猜测的说明

由于还只是些例述性的考察，不具备充分依据，所以只能（从这种意义上）把它叫做“数学的‘二象’机制”猜测．其实，对于以“二象”的客观世界为背景的数学，猜测它也存在“二象”机制，显然是合理的．

笔者相信，如果意识到数学的“二象”机制，不仅对既有的复变量分析、参变量分析、函数建模、非标准分析、“二元数”代数等领域的继续深入更为有利，而且对一些高难度攻坚性问题需要寻求突破口时，则是不无裨益的．

4．猜测的小结

前面曾把问题的关键归为“无穷小”结构及其“二象”观，现在知道它正是实轴结构理论的根本，因此只要从实轴结构角度即能触及本质了．这时上述思想即可说成：首先应在实轴结构的观念上，有必要参考非标准分析的“单子”思路（也就是“二象”论思路），然后对既有理论作出相应调整．其次在实轴的“二象”观念下，对其公理集合论的“公理系”应重新审度．再则是对数理逻辑本身作出相应的“二象”性改造等．

实轴基本结构观的改变是个根本性问题，这也许会带来整个数学基础的适当调整．而且这是件非同小可的事，需要更多实证性、创造性、突破性的工作，深刻而复杂，但也是更有希望完成实轴认识的．

当然这些都还是个猜测，且看未来历史的实证判定吧，抛砖引玉也．

八、“二象论”的数学研究

至此，我们都是带着“二象系统论”的观点去理解数学、对待数学，那么本段则是反过来，谈谈用数学去研究、发展“二象系统论”的问题．

目前，“二象系统论”只能说是建立起了概念和方法论、二象观等（例见《系统学二象论初探》，系统工程理论与实践 2007（5）），至于其理论，特别是以“数学逻辑”为工具的理论还仅仅才开始，因此还十分需要数学的支撑，这里大有驰骋的天地．

下面为全面计，仍从“数学中的二象”研究与“二象中的数学”研究等两个方面分别略举几个即可进入的研究问题：

（1）数学研究中的“二象”化问题．

首先是二象“意识”的树立问题．“意识”是一种升华，如果没有这种升华，即会“熟视无睹”，只能凭其自然而发展．

其次是在承认了数学中通有的二象机制基础上，进一步对“几何点”作研究，也许它存在“二象”结构，也需要“二象”化．

再一个基本问题是“数理逻辑”中的“二象”机制探索．既然“数理逻辑”是数学的基础，而数学中存在着二象机制，那么数理逻辑中也应该且深刻地存在着二象机制．

根本问题是归结到实轴的“二象”结构探讨．如果“几何点”和“数理逻辑”的“二象”机制得到揭示，那么实轴结构的揭示也就可望了．

（2）“二象系统论”的数学研究．

这里不妨重声第四章第四节末谈到的“八个方面”课题，它可简述为系统概念与二象概念之间的关系研究；系统的“完全空间”（诸如目标空间、虚象空间、元素空间结构及相互间关系等）研究；“二象系统”各条性质的理论探讨，诸如二象间“对偶”、“互动”及其“柔性”等的数理探讨这一颇具吸引力的领域；复杂系统的二象“复合”结构与“多层”结构的研究与应用；“竞争”、“博弈”中的“二象”论分析；“二象思维”（如“竖向思维法”的建立等）研究；“二象系统论”的应用研究等．

“二象系统论”亟待数学的支撑，数学在这里有宽阔的领地．

第十三章　现代数学与社会科学的“联姻”基础

在数、理、哲三大古老学科体系中，数学对物理学体系（自然科学与工程技术）的应用一直较好，如今更有着现代物理与现代数学的辉煌结合，被杨振宁誉为数学与物理学之间的“联姻”．的确，即使在生物学中也是如此．

那么，比较起来，数学在社会科学及人文科学方面的应用仍然较差，即使有现代经济学及软科学、系统科学、管理科学等系列的定量方法给社会科学的定量分析增色不少，也毋宁说社会科学中仍然只是经典数学的用场．

要问，这是什么原因？是社会科学本来就与高深数学、现代数学无缘吗？现代科学发展形势要求我们对这一问题作出本质的回答．这也是本章的基本任务．

本章发现，原来社会科学特征与“现代”数学特征之间存在着本质的相似性，甚至来的更深，从而说明它们之间存在着可观的联姻基础．这里仅作了一些基于本著知识的数理思维和合情推理，相信完全可以用现代数学去建立起一套社会科学的基础理论．望能引起来自社会科学的年轻读者和对社会科学感兴趣的年轻数学家们的重视，现略述于下．

第一节　现代科学与现代数学特征

一、从“现代”概念谈起

1．“现代”的划分

目前，任何科学都有了它的“现代”概念和现代内容，但对“现代”的划分并无明断．一般说严格的**现代**系指20世纪80年代以来的二三十年．比如系统科学、技术科学的“现代”划分即如此．稍广的，系指第二次世界大战以来，比如计算机科学、经济学的划分即如此．更广的，则指20世纪初以来，比如现代物理学即如此．特别地，数学的现代时期则更为广义，系指19世纪后半叶以来．不言自明，这是因为数学的爆炸性发展时期起自19世纪后半叶，它的发展轨迹，如

图 13.1 中 S 曲线. 也就是说，在那时候数学的上升即已很陡，很快即基本上上升到了 20 世纪 70 年代以后一般科技发展（图中 J 曲线）的可比当量水平，叫做**超前就位**，以后的发展则较为平缓. 今天看来，数学发展状态与一般科技发展状态相比，处于相当水平（见图 13.1）.

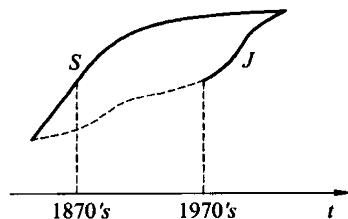


图 13.1

总之，我们说现代数学时期覆盖了一个多世纪的区段，是最长的. 这在一般科学来说，只能叫做"近现代"阶段了.

2．现代数学（学科）概念

现代数学这一术语已很流行，但其概念很不统一. 不过有一点是共识，那就是现代数学≠现代的数学. 亦即都认为并非数学进入了现代就成了现代数学，若这样定义，那是平凡的、无意义的. 现代数学应该是指其高深的、漂亮的数学学科. 那么，哪些数学学科才是高深的、漂亮的呢？自然，如果取数学家们各自提名集的"交"，那将来得太严格；如果取其"并"则来得太广义. 我们认为最好的方式是，根据**现代科学特征**来判定现代数学的特征，从而按现代数学特征，鉴别出现代数学的典型学科.这是因为数学应该是"科学"这个总集合之一子集，因此现代数学也应该属于现代科学（集）之一子集，所以它们应该有共同的特征，或说相似的特征. 事实上，从人类社会体系来讲，整个大科学总是互相联系着的，Hilbert 也曾强调过这点，如今这已成为常识. 那么，从这一宏观视角来看，它们的发展一般不会有多大的时代差异，如图 13.1 中一个世纪的差异实属历史特例. 因此整个科学体系，作为高维空间中一个点来说，其历史发展轨迹，应与第二章第一节图 2.2 的基本态势相似（或若作出科学体系各学科的历史发展轨迹的"统计"轨迹来看，亦然）. 下面则首先讨论现代科学特征，并以此作为判据来判定现代数学的特征.

二、现代科学特征

"现代科学特征"系指 20 世纪 70 年代以来，或第二次世界大战以来通有科学的时代特征. 它的确定，可以依据历史进入现代以来比较稳定的流行说法进行. 这本身就是一种"社会统计形式". 容易判定出它也具有统计学原理，所以也具有合理性. 据此，关于现代科学特征的流行说法有：定量分析时代、信息化时代、软科学时代、系统科学时代和管理科学时代，或说是横断性科学时代、综合性科学时代、复杂性科学时代、非线性科学时代、不确定性科学时代等.

当然，这些说法之间并非彼此独立．比如，定量分析的加强是现代科学的共通特征，包括社会科学的定量分析也在加强，因而是其他特征共有的；信息化是计算机时代和电信时代的体现；复杂性、非线性、不确定性之间更是互相交织的，代表它们的典型学科是系统科学．至于横断性、综合性也是整体性、全局性、大范围性，可以说都体现在系统科学、管理科学中了．

综合以上分析可见，横断性、综合性、复杂性、非线性是现代科学的主要特征．它的代表性学科或叫典型学科，一是管理科学，二是系统科学，两者都是学科体系．不过对于管理科学，在这里主要是指其科学基础和基本原理，而不在乎其方法．它与目前“管理教学”中为了应付实际而流于方法、案例和技术操作的培养特征不是一回事，虽然目前管理科学的科学基础和基本原理尚未正式建立起来，但它毕竟应该存在．系统科学则以其老三论、新三论和新兴三论为典型学科，不必细说．

相似于现代科学特征，可在数学中找到类似特征于下．

三、现代数学特征 I：泛函性

在第十章第三节、五中着重谈到，泛函分析学的特点是研究函数空间或叫抽象空间．这本身就是对经典数学的一大突破，是现代数学一大特色，但这里仅着重从泛函“概念”的引入来看看现代数学的一种新观点、新思想．

泛函映射可定义为形式

$$F:\Omega \to R$$

其“概念特征”已于第四章第一节谈到，为加强印象这里再剖析如下：

(1) 函数 F 的“泛性”．也就是说，F 是广义的，它不仅可以是初等函数、超越函数等经典函数式，而且可以是任意的符号标示或方法步骤的文字叙述等来定义的函数．比如，范数 $\|\cdot\|$ 即是“一类”泛函，它包括 max(·)、 min(·)（模）等，这是“泛函分析学”中讲到的（那是为了便于它“分析”）．但如管理科学中的“评价”也是一类泛函，它包括评估、评判、裁判、测验、选举，以及赋权映射（比如 AHP 法）、群量度等都是．再则，诸如所谓模糊数、区间数等也是一种泛函；统计学中样本值也是一些泛函值；把商品向量转换成货币也是一个泛函映射；我们说某某人或某某企业好或不好，都是一种泛函映射结果．由此可见，泛函的“函数”已体现了“泛性”．因此比如对泛函也很难建立起它的反函数概念．

(2) 原象 Ω 的“泛性”．在这里的 F 泛性下，Ω 已不只是点式的几何对象，更不只是欧氏空间了，而是一种非几何点式的、非局部性的对象集，叫做抽象空间．比如，所有最优控制模型的目标函数都是个泛函数（第九章第五节），但控制

对象已不是几何点，对象集已不是欧氏空间，只能叫做广义的或说抽象的空间.

例 1 如图 13.2 所示，求连接 A, B 的曲线，使之绕 x 轴旋转所成的旋转曲面面积最小.

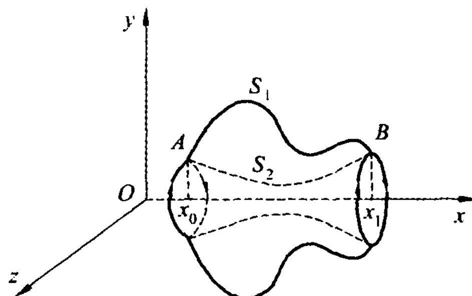


图 13.2

这是个变分问题，为此先建模，即表出旋转曲面的面积来：

设连 AB 的曲线为 $y=y(x)$，旋转曲面面积为 S，易知有

$$S=S(y(x)) \ =2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

亦即 S 是曲线 $y=y(x)$ 的函数，因而 $S(y)$ 是个泛函，它将随着 A, B 间曲线（成族）的不同，相应泛函值（这里即曲面面积）也不同. 所谓变分问题是先对泛函 S 求变分并令其等于 0，得到所谓“欧拉方程”再求解. 亦即求 $\delta S(y)=0$ 的解（记为 $y^*=y^*(x)$），它是一条曲线（这里实为悬链线，即图中 S_2 曲面（虚线所表）的生成线)，而不再是点了.

再如，当评委对一场表演评分时，只需每个评委委员仅凭自己的映象给出一个映射（心理打分)，然后统计即成. 这时的“映射”也是个泛函映射. 那么问，函数值“心理分”是怎么来的? 显然是以整场表演作为 Ω 所作出的一种整体“映射”，而不是按其几何空间逐点映射而来.

总之，泛函中原象 Ω 也是对经典函数原象的“点”式特征的推广和“泛义（广义)”.

(3) 象值的“数量”性. 这是指，一个泛函值总是一个标量，比如 (1)、(2) 提到的泛函值都是标量.

注：当泛函映射的象值非标量时，叫此映射为“算子”. 具体说算子是抽象空间（或其子集）到抽象空间（或其子集）的映射，包括抽象空间的自映射. 由于泛函、算子表达式的广泛性，不可能像经典微积分那样来分析函数式，而在泛函分析中重点是对抽象的、线性的函数空间及其上的算子作分析. 比如常常需对(线

性)空间中算子“序列”作研究，因此也往往在具有完备性的 Banach 空间或 Hilbert 空间上讨论.

综合(1)、(2)、(3)可见，泛函已经突破了经典函数的框架，不再是对几何点式的、局部的对象作映射，而且函数式的概念也广义化了. 这些都是合乎现代科学综合性、模糊性、抽象性特征的.

四、现代数学特征Ⅱ：大范围分析

正如第十章第三节、三所说，大范围分析也叫全局分析，它代表了现代数学的典型特征，其典型学科是现代微分几何学（直接叫“微分几何学”），其理论是建立在一般流形上的. 它之所以能成为**大范围分析**，其特色在于**联络**或叫**绝对微分**的引入，现简述于下：

设有 n 维流形 M（概念见第十章第三节、四），点 $P\in M$，其**切空间**为 $T_P(M)$，$T_P(M)$ 的基为 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

再记点 $p(\in M)$ 的**余切空间**为 $T_p^*(M)$，它是切空间 $T_P(M)$ 的**对偶空间**. 亦即设有光滑函数 f，其定义域 $D(f)\subset M$，$p\in D(f)$，则有泛函映射

$$\mathrm{d}f_p : T_P \to R \in T_P^*(M)\text{，或说}\quad \mathrm{d}f \in T_P^*(M)$$

从而

$$\mathrm{d}f_p=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$$

因此 $T_p^*(M)$ 的基为 $(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$. 并简记为

$$\mathrm{d}f_p=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{d}x_i \triangleq \alpha_i\mathrm{d}x^i\text{（爱因斯坦简略记号）}$$

这时进一步取

$$T_p\times T_p\times\cdots\times T_p\times T_p^*\times T_p^*\times\cdots\times T_p^*(M)=(T_p)^q\times(T_p^*)^r\triangleq\Gamma_{pq}^r(M)$$

把它叫做点 p 的**微分张量空间**，常常只需取 $q=1$（见下面），并记为 $\Gamma_p^r(M)$ 讨论. 这时对于 r 阶反称张量 $\omega\in\Gamma_p^r(M)$ 有外积形式

$$\omega=\alpha_{i_1i_2\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}\triangleq\alpha_I\mathrm{d}^r x^I \tag{13.1}$$

W 称为 r 重外微分形式，其系数 α_I 为常数或数量函数，属于其对偶空间.

这时再对 $\Gamma_p^r(M)$ 施以微分（d），则有

$$\mathrm{d}:\ \Gamma_p^r(M) \to \Gamma_p^{r+1}(M)$$

从而对 $\forall \omega \in \Gamma_p^r(M)$，皆有

$$\mathrm{d}\omega = \sum_I \mathrm{d}\alpha_I(p) \wedge \mathrm{d}^r x^I = \sum_I \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \right)_p \wedge \mathrm{d}^r x^I \triangleq \sum_I \beta_I(p) \mathrm{d}^{r+1} x^I \qquad (13.2)$$

至此我们的讨论都是在（任意局部点） $p \in M$ 进行的．的确，在 M 上若要换成另一个点 $p' \in M$，则变成另一个局部坐标系（另一个平直空间）了，需要作坐标变换才行．事实上，上述外微分形式的一大优点即便于表出坐标变换．这点即使在一般重积分，比如 stokes 积分上也十分有用（例见《数学思想赏析》）．至于在微分流形理论中，坐标变换更少不了，形成所谓**活动标架**，在 M 上即形成**标架场**，这里免予详述．

现在对 $\Gamma_p^r(M)$ 中 p 任取，并一般地记为 $\Gamma^r(M)$，则这时可引出所谓**微分张量丛**，记为

$$(M, \Gamma^r(M), \pi^{-1}) = \Omega$$

其纤维即 $\Gamma_p^r(M), \forall p \in M$，它是 r 重外微分形式，对其再微分，就是通常说的**外微分形式的微分**（见（13.2）式）．

于是，如图 13.3 所示，所谓 Ω 上的一个**截痕**（图中曲线），是指 M 上一个向量场，其向量就是各纤维（张量空间）中的具体张量．

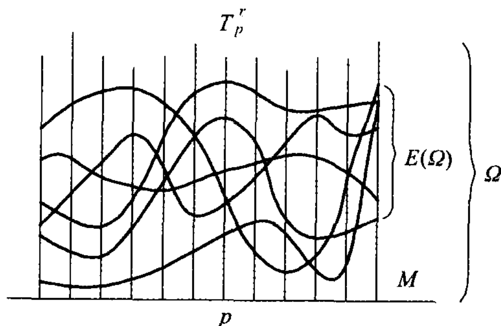


图 13.3

这时记 Ω 上所有**截痕（族）**为 $E(\Omega)$，则可在 $E(\Omega)$ 上引入数学分析．事实上，

早在20世纪30年代即已在$E(\Omega)$上引入了连络概念（E.Cartan），从而才算真正开始了几何学的“大范围分析”时期．现定义联络于下．

定义 13.1（联络）$E(\Omega)$上**联络**又叫**绝对微分**，它是一个线性映射D，即$D:E(\Omega)\to E(T^{*}(M)\otimes\Omega)$，满足：

（1）$\forall e_1,e_2\in E(\Omega),\quad D(e_1+e_2)=De_1+De_2$；

（2）对于$e\in E(\Omega)$及$\forall\alpha\in C^{\infty}(M),\quad D(\alpha e)=D\alpha\otimes e+\alpha De$．

直观可见，在截痕族$E(\Omega)$上的连络映射，是将“截痕”这种Ω上的整体对象（张量场或见图13.3中一条条曲线）作为“变量”(可见其“大范围”性)，以考察它的一种“变化率”(可见其“分析”性)，所以叫它是真正的大范围分析．显然可以经再创造用于“社会丛”分析．

五、现代数学特征Ⅲ：非线性、高维空间、不确定性和抽象化风

这些特征都是前面谈到过的，不必重复．这里只需指出，现代数学也一度有过一些弊病，其中突出的一个恐怕就是“抽象化风”了．不过前些年已经为数学家发现，并已惊呼“刹车”，但我们不可因此否定抽象化方法．抽象化仍然是现代数学的一个特征，只是作为纯数学家应防止为抽象而抽象的倾向，然而作为应用界的应用数学修养阶段，宁可认为我们的抽象化能力还不够，更不要忌讳它．

注：此外也当看到，这里虽然没有正面提到拓扑学、代数学等，但它们作为数学结构实际上已融入各个典型学科，成为实现现代数学特征不可少的基础了．特别是代数学，基于它在第七章谈到的生机和它以广泛对象（非数的事物）作为研究对象的特点，社会科学对象正应该是它的用武之地．可惜目前只能说还处在“招商”阶段罢了．

第二节　社会科学特征及与现代数学的相似性

一、社会概念、属性空间与社会丛

1．社会的物质基底与社会的组织空间

记L为社会人的集合；Ω为自然资源集合，包括人类已知的和未知的（理论上的）自然资源总体．显然，从这一意义讲，整个物质宇宙都属于Ω．再记S为社会的**物质基底**，则有

$$S = L \otimes \Omega$$

$\otimes$表非几何对象的乘积关系.

又，记S的幂集为

$$2^s \triangleq 2^L \otimes 2^\Omega,\quad \forall \beta \in 2^s,\quad 且\quad \beta \cap 2^L \neq \varnothing$$

β叫做社会组织，总的叫2^s为s的**社会组织空间**.

2．社会的属性空间

对于任一社会组织$\beta \in 2^s$，皆有其属性空间，记为β^*．为认识属性空间应先了解“属性”. 属性是一哲学术语，泛指一个物质对象区别于其他对象的抽象信息和特征. 所谓β的**属性空间**系指β在理论上的所有属性（粗略地可分作社会属性和自然属性）之集合，它应该被视作广义的**对偶空间**（这也是我们记为β^*的缘由），只是属性空间来得更为复杂、有待专门研究罢了. 比如，其维数和线性性等都是有待具体研究的课题. 这里我们只统一地用其“对偶空间”思想.

记$\{\beta^* : \beta \in 2^s\} = \mathscr{B}$，则$\mathscr{B}$叫做**社会的属性空间**.

3．社会丛

记$((s;2^s),\mathscr{B},\pi^{-1}) \triangleq \mathscr{W}$，$\mathscr{W}$叫做**社会丛**，其中$s$为底空间，$2^s$为其幂空间，$\mathscr{B}$为建立在$2^s$上的丛空间，其“纤维”为$\mathscr{B}_\beta = \pi^{-1}(\beta),\ \beta \in 2^s$．$\pi$是“投影映射”. 显然，社会丛就是社会的安全空间（第四章第三节）. 易知，这里社会丛已不同于流形上纤维丛，而是其推广，主要是这里的s，2^s尽管也是对应于一般拓扑空间的“核拓扑空间”（第十章第二节），但已不是一般的几何流形. 同时，$\mathscr{B}_\beta$一般不再是线性空间，更不是几何的“点”式空间，而是更为广义的远未认识透的“精神空间”.

4．社会活动

所谓社会活动，即$\mathscr{W}$上一种自映射，

$$\varphi : \mathscr{W} \to \mathscr{W}$$

这时$\{\varphi\} \triangleq \Phi$叫做**活动空间**. 活动空间包括**科学**的和**生活**的两类子空间，记为

$$\Phi = \Phi^0 \oplus \Phi^c$$

其中科学活动（子）空间Φ^0又可表为自然科学活动（Φ_1^0）与社会科学活动（Φ_2^0）两类，有$\Phi_0 = \Phi_1^0 \oplus \Phi_2^0$，那么:

自然科学 Φ_1^0 的特点是：$\forall \varphi_{1i}^0 \in \Phi_1^0$，有

$$\varphi_{1i}^0 : 2^\Omega \to 2^\Omega \ , \varphi_{1i}^0(2^\Omega) = (2^\Omega)_i^0 \subset 2^\Omega$$

表示被第 i 门自然科学认识或开发了的资源空间.

社会科学 Φ_2^0 的特点是：$\forall \varphi_{2i}^0 \in \Phi_2^0$，有

$$\varphi_{2j}^0 : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$$

满足

$$\mathscr{B}_\beta \to \mathscr{B}_\beta, \quad \beta \in 2^s, \quad \beta \cap 2^L \neq \varnothing, \text{ 且 } \varphi_{2j}^0(\mathscr{B})_j^0 \subset \mathscr{B}$$

即第 j 门社会学科所起的作用是扩张对社会的属性空间认识，但因 $\mathscr{B}$ 是理论上的全部属性的空间，所以尽管 $(\mathscr{B})_j^0$ 得到了扩大，仍只能是 $\mathscr{B}$ 的子集.

此外是**社会生活 Φ^c**，它与 Φ^0 是互余的也叫互补的，因此也可说是对偶的（因完全空间的虚实二象间也是互余的）. Φ^c 的特点是：

$$\Phi^c: \ 2^s \to 2^s$$

比如社会的生产、交换活动及交通管理、市场管理、安全维护等，皆社会生活，其映射效果是使其对偶空间 Φ^0 将其映射效果落实（投影）到社会基础（$s, 2^s$）上，使社会生活逐步提高（即 $\Phi(\mathscr{W}) \subset \mathscr{W}$ 逐步扩大）.

从以上各映射的特征来看，它们的邻域迥异，因为这里仅是就其典型特征而论. 实际的社会活动是错综复杂的，各映射在实际的社会生活中，当视具体生活内容不同，而以不同模糊度呈一定的模糊状态存在.

至此可见，社会丛 $\mathscr{W}$ 与社会生活 Φ 构成的大系统 $(\mathscr{W}, \Phi)$ 包览了人类、环境及其生活的一切. 但这仅仅是宏观描述，不管从它的哪一方面都还可以继续深入，并且引入“分析”，遗憾这不是本节的任务，兹免.

二、社会科学的特征

现在特别来看看 Φ_2^0 的特征，这时容易看到如下几点：

1. 社会科学对象具有非几何性，因而具有非点式、非局部的和抽象的特征

这是因为，$\mathscr{B}$ 由属性空间构成，而属性空间的特征即非几何空间，且具非局部性，是以一件件事物（或事务，统称事物）为单元的全局性和抽象性对象. 比

如，心理学、教育学似乎直接以人（实体）为对象，但它不同于生物学和医学，而是以人的属性为直接对象．又如，文学、艺术，也直接研究人类属性；历史学研究人类过去的生活事物，并上升成精神成果，这些也都是属性空间的研究．

2．社会科学的映射具有拓扑特征和泛函性

这是因为，$\mathscr{B}$ 中属性事物本身具有非实物性，因而具有较强的**信息特征**．而拓扑性正是信息事物的重要特征，比如人类对历史事物的研究即具有较强的拓扑特征（历史是胜利者的）．至于泛函性，主要是指它的“映射”方式广义、映射对象非点式，基本上合符“第一节、三”所述泛函特征．

3．社会科学的横断性、综合性特征（或说对于自然科学的“对偶性”特征）

这是因为，比较起自然科学的学科之间具有的分明性来，社会科学的学科间交汇、覆叠较多．比如，对于历史学来说，各社会学科中也都有它的历史分支；对于文学来说，哪门学科也少不了文学．至于心理学、教育学、艺术学乃至社会学等等，相互间无不具有较强的融汇特征．这些都是与它们的对象 $\mathscr{B}$ 本身具有“软”性、拓扑性、泛函性（一句话即“对偶性”）特征分不开的．

特别的，从社会的治理和经济、管理等科学来看，它更具有典型的综合性、横断性特征．这是因为它们的共通点即“管理”，而管理的首要特征即**全局性**，是对其管辖对象的全局考察、综合分析和**全局决策**，否则说不上管理．此外，从管理科学所依据的理论基础看也不是独立的．它是综合运用自然科学和社会科学广泛成果而成的，是它们的“对偶”象，所以管理科学堪称典型的横断科学．也正因如此，管理科学一度不为抱有较强自然科学观的学者所承认，主要是说管理科学没有自己“独立”的基础理论学科．那么，这里即说明了，没有独立的基础理论学科正是管理科学的特征所在，也就是它的横断性、综合性、对偶性特征的必然反映．当然，也不是说管理科学可以不要基础理论，只是不必强调它的基础理论（相对于自然科学和社会科学理论）的“独立性”罢了．事实上，现代管理科学也正在（其一定的科学“年度”基础上）逐步形成它的以管理为宗旨的理论基础和基本原理．

三、社会科学与现代数学的“联姻”前景

至此，我们看到了，社会科学的基本特征乃至整个社会的基本特征与现代数学的基本特征有着何等的相似．这说明了，社会科学或说社会领域应该是数学，特别是高深数学、现代数学、将来数学的一个很好的背景空间和应用领地．

那么，为什么在社会科学上数学应用一向很“差”？我们认为，一方面，过

去是因为时代车轮的行程未到，社会科学本身尚未深入到那种需要在属性空间 $\mathscr{B}$ 上去发掘深层次规律的程度，因此过去培养社会科学家忽视了数学修养，数学家也不愿问津社会科学．另一方面，正因如此，数学在社会科学上的应用往往仅限于经典数学甚至初等数学．

那么，正如经典数学与现代数学之间的本质差异一样，经典数学相对于社会科学的本质特征来也是有着本质差异的．所以经典数学不可能揭示社会科学的本质规律，而只能在诸如社会统计、财会计量和平凡生活上起到一点“泛函值”的作用（**注：经典数值在社会上往往是作为泛函值来表现的**）．

也许今天社会科学与数学之间的关系，正好似 **19 世纪生物学与数学之间的关系**．19 世纪，“数学在生物学中为 0（恩格斯）”，曾几何时，现在已翻转过来．比如，数学在分子生物学、基因理论、生态学、酶动力学、生物动力学、药代动力学、生理医学等许多方面都有了很好的“联姻”，且其发展正处在逻辑斯谛（Logistic）曲线的陡增阶段．

那么，也许不久的将来，社会科学上的突破也将产生对数学的迫切需求．同时，根据上述分析可以肯定，到那时社会科学对数学产生的需求，至少将是现代的非几何空间的全局性、综合性、抽象性、泛函性、代数性等的“高深数学”．事实上，社会科学今天所处状态已经比上世纪的生物学好得多了．比如，在经济学上，特别是在数理经济学上已经有了很多很好的联姻事实（例见拙著《数量经济学导论》）．又如，目前金融经济和经济管理上以及人口、劳动、市场、金融方面还有越来越多的深刻问题，包括似乎越来越多的悖论、怪圈等，正在越来越多地显露出它们向数学挑战的戈矛．

不过也得看到，目前即使一些数学中很好的理论，在经济管理中也不是一用即灵的．比如，控制论之于经济管理，混沌理论之于经济学等就是这样．这不是因为别的，而是因为经济管理对象的前述特征，使之更为复杂、更为抽象，数学需要更多的创造才能用得上，而不是简单平移过来即能成的．所有这些提示我们，社会科学、社会领地的 $(\mathscr{W},\Phi)$ 不是简单的，不是容易对付的，它需要的不仅仅是现代数学，更需要“未来”数学，不难猜测，$(\mathscr{W},\Phi)$ 将永远是数学的挑战基地．

第三节　社会科学与现代数学“联姻”前景的逻辑地位

本节将进一步从几个事实说明，在社会科学与现代数学之间存在联姻的逻辑空间．

一、现代数学与现代物理的联姻事实

且不说历史上数学与物理之间的密切联系，仅就 20 世纪这一数、理公共的现代时期来说，它们的关系也是十分密切的．须知，在数学的现代史中曾经有过一大阶段（第二次世界大战前）是排斥应用数学、崇尚纯粹数学的，即使在这样的形势下，比如物理学中，理论物理（及力学）也是一直与现代数学密切联系的，所谓数理“联姻”的说法即出自于此．

理论物理在 20 世纪初即有了“相对论”与数学的闵可夫斯基空间(四维时空)、黎曼几何等“非欧几何”的联姻；接着是“统一场论”及其简化的“规范场论”以及研究粒子运动规律的“量子力学”和研究粒子自身物理特征的“基本粒子理论”等，这些都充分地与现代数学结合了．最为典型的是与“微分几何学”的大范围分析结合，其次是与调和分析、希尔伯特算子空间理论、代数学理论等的结合．

所谓“结合”、“联姻”系指，这里并非数学对物理的简单移植，而是双方学者共同切磋，根据具体问题重新分析、建模，最后形成现代数学思想下对具体问题的再创造、再认识，产生的效果是彼此促进、两相互补，因而叫做“联姻”．

二、任何学科的深入都需要数学和哲学

为什么 20 世纪以来物理学对现代数学如此青睐？正是因为从 20 世纪初开始在物理学上产生了惊天动地的牛顿空间革命的结果．物理学经过这一突破性发展，深入到了一个难以直观、难以仅凭实验去认识的境地，这时必须依赖纯逻辑的推理．但纯粹的逻辑学是以认识逻辑范畴内在规律为使命的学科，而数学则是以客观世界为背景，以认识客观世界规律为使命的逻辑学科，因而这时对于深入了的物理学将自然地产生与数学两相结合的要求．的确，为什么在今天可以说力学就是一门现代数学、理论物理就是一门现代数学？这正好表明了数理结合、“联姻”的结果，已不仅仅是一个对另一个的简单应用问题．

同时，上段已谈及的生物学对数学的要求的“突变性”转折，也典型地说明了“一门学科当其深入发展后即需要与数学结合”这一事实．

此外，相信读者也能在诸如工程技术科学以及管理科学、经济科学等等科学领域，举出更多的范例以说明本段结论，“任何学科的深入发展都需要数学”．其原理是共同的，因为深入后的对象将变得不直观、更抽象，或要求更精确，或难以实验观测，所以需要“数学逻辑”去帮助探索．那么，相信社会科学对（现代）数学产生广泛需求的时期必将到来．

不过，第五章也已谈到，毕竟“数学逻辑”还是有限的，它既不能包揽形式

逻辑，也不能包揽辩证逻辑，更不能解决全部问题．当问题超出它的典型领域时仍然无能为力，甚至即使典型的、数学可及的领域，要把问题纳入数学——分析、建模，也少不了**哲学思辨**，所以更要说“任何学科的深入发展都需要哲学”．这与曾说过的“任何科学的前沿都是哲学”，是一个意思．

三、联姻前景的分形考虑

理论物理还表明了一个重要现象，即宏观宇宙与微观世界是相通的．比如，作为描述宏观宇宙运动特征的相对论和统一场、规范场理论以及波函数等理论在量子力学、基本粒子理论等微观世界仍然有用．进一步，比如引力论与量子论之间虽然也有不相容的一面（那是因为毕竟这样的宏微观世界还不是完全空间），但它们之间更有着相容的重要的一面，比如正在建立的量子引力论即如此．这说明宏、微观世界有着更多的相似特征．

的确，从**分形理论**（第二章第二节）也容易看出，宏观与微观本是物质宇宙的两个分形层次，既然是分形层次，它们之间当然应该有**相似性**．那么，介观层次又如何？

我们说这里说的介观层次是复杂的，首先即可分为物理科学的介观和社会科学的介观两个概念．前者即牛顿物理或牛顿空间范畴，相应的数学即经典数学的欧氏空间范畴，它们恰好是不具有现代数学、现代物理基本特征的典型层次．那么后者则相反．虽然社会科学对象从物质对象来看属物理学的介观（比如人及人类社会所依存的物质资源都可以说是属于这一物理学介观世界的），但主宰社会的却不属于这一介观，甚至是超出物质宇宙宏、微、介观层次的，它是又一个分形层次，一般叫做**精神世界**．

当然，对于精神世界还没有更多的科学结论可供参考．这有待宏微观科学适当成熟以后的又一层新突破，现在还没有正式攻克它的科学基础．不过容易认识到，它是“大自然”的又一个分形层次．从物质宇宙的“完全空间”中量子论与引力论之间的不完全相容性和对称破缺性等现象也都说明，还需要在**更大的完全空间内**，才可能保证真正完全的、相容的、对称的“守恒性”．若这样，则精神世界即是该最大的完全空间（大自然）中相对于物质宇宙（实象）的“虚象”．因此由精神世界操纵的社会的介观层次具有物理的非介观层次这一特征，可从哲学的思辨意义看亦纯属必然，所以它有着明显的逻辑地位．

那么，说社会科学与现代数学具有天然的“联姻”基础也纯属必然，但愿真正的“联姻”时代能早日到来．

第四节　应用例 I：市场经济下的竞争机制

实施市场经济体制的关键是鼓励“竞争”，那么按 A.Smith 的“无形的手”原理，竞争的关键则是提高“效率”. 具体说是鼓励每个市场参加者为实现自己的最佳效益，而充分发挥自己的最大“潜能”，从而客观地为市场乃至整个社会输入“有序能”，以达到高效地发展社会.

不过随着时代的发展，竞争的形式已变得不完全了，且越来越复杂. 它在给社会带来有序能的同时也带来了无序能（正熵 S_+），因此有必要认真对付“竞争”这匹野马，为此首要问题是认清它的“机制”和“本质”.

但奇怪的是，关于“竞争”这一术语尽管已用得十分频繁，但过去对它的理论探索并不多，本节旨在现有研究基础上，采用系统描述的方式对其求得进一步的深入. 显然，这里有着丰富的内容和系列的新课题，不是一节所能陈述的，我们这里仅作约略的简述，望能起到“点击”效果.

自然，我们的研究将始终服从于“价值论”这一总的前提.

一、社会的市场结构

（1）关于社会的结构特征，可从多个方面去描述. 这里从市场经济角度将其描述为

$$\Omega = \{(X;E)\times Z\} \tag{13.3}$$

其中 Ω 为市场意义下的社会；X 为有形市场，包括典型的或叫传统的市场和参与交换的商品（包括一切上市的物品，诸如最终产品和中间产品等）以及市场参与者（分作供需两类人）；E 为外围市场，包括两种含义：一种是有形市场 X 的扩张，诸如所谓信息市场（如网上交易）、金融证券市场、期货市场乃至各种中介、直销、代销等等形式所表现出的交易行为，而另一种是事业性行业部门，如文化、艺术、教育、卫生以及邮电、交通、新闻等等，它们暂时还未形成“市场”，或说市场化的困难较大，但最终可以市场化；Z 为政府职能部门，如公检法、政府首脑机关和商、税、环保、民政等行政管理部门都是.

须看到，$(X;E)$ 是社会的**基本市场**，也是市场的全部，而 Z 与 $(X;E)$ 之间的关系不是平行的，而是管理与被管理的（上下）关系. 从数理角度来说，Z 与 $(X;E)$ 之间是共轭关系，或从系统论来说是“虚实二象”的对偶关系，抑或从辩证论角度说是“对立统一”关系. 最重要的应该看到，一个系统只有当它满足了“二象”

对偶的结构关系，才能成为稳定的、完全的系统．事实上，容易看到作为一个社会的 Ω，不管从哪方面去描述，它都具有这种虚实的二象结构，这是社会 Ω 的一个必要特征．

同时容易看到，在 Ω 中子系统 X 及 E 以及它们中的各个子系统都是开放系统，原则上说 Ω 也是开放系统（因一切客观系统都是开放系统，只有人为界定的系统才可能是封闭系统），但对于 Ω 我们可以界定它为封闭系统．这是因为从经济角度看，Ω 有海关自主权，与外界交流受到自主权控制．再则，也可以把 Ω 的对外交易部分视为 $(X;E)$ 中增加了一个抽象元素．总之，我们可设 Ω 是**封闭系统**．

进一步可从数学角度设 Ω 为凸的完备系统，也叫做凸的完备空间．

（2）特别地，记

$$\Omega^* = \{(X;E)\times Z\}^*$$

叫做 Ω 的**属性空间**，此即实在的 Ω 及其各种子集所具备的一切抽象特征、性能、效能等事物之集．再记

$$\Omega^\sim = \{(X;E)\times Z\}^\sim = (\Omega,\Omega^*)$$

叫做 Ω 的**完全空间**，也叫“完全社会”．这里完全空间 $\Omega^\sim$ 是空间 Ω 以上的又一层次虚实空间结构，具体说是虚空间 Ω^*和实空间 Ω 形成的 (虚、实) $=(\Omega^*,\Omega)$ 二象结构．

同理，对 X 也有 X^* 及其完全空间 $(X^*,X)=X^\sim$ 结构；E 也有其 E^* 及其完全空间 $(E^*,E)=E^\sim$ 结构；Z 也有其 Z^* 及其完全空间 $(Z^*,Z)=Z^\sim$ 结构；$(X;E)$ 有其 $(X;E)^*$ 及其完全空间 $(X;E)^\sim=((X;E)^*,(X;E))$ 结构等．

那么易知，所谓“社会生活”实际上是在相关的完全空间上进行的．

（3）我们可以界定 $\Omega^\sim$ 是个广义的 Banach 空间，所谓“广义”仅指其范数可以为负．事实上，把负值再取绝对值即成为典型的赋范了，但为了适应实际，仍取为广义赋范空间，从而有广义 Banach 空间．

首先，据社会事物的可度量性，即容易界定 $\Omega^\sim$ 是广义赋范空间．这是因为在价值论观点下对任一事物 $f\in\Omega^\sim$ 皆可作“评价”度量，且这个评价值的绝对值满足范数公理．进一步，据泛函分析知识，Ω^* 也是广义赋范空间，从而也有 $\Omega^\sim$ 是广义赋范空间．

其次，由于 $\Omega^\sim$ 本身是完全空间，据此易界定其完备性．这是因为根据实际特征，容易界定 $\Omega^\sim$ 中序列的敛、散结果都在 $\Omega^\sim$ 中，这点比完备性更强．

二、市场 X 上的竞争模型

虽然 X 可表为

$$X=(\text{供 } S, \text{ 需 } D) \triangleq (S,D)$$

其中 S 既表示供给总量，也可表示供方商家集合．同理，D 既表示市场需求总量，也表示顾客集．

在现代社会中，由于生产力的提高，对于任一成熟产品和成熟市场皆可设 $S>D$（买方市场），那么在市场经济前提下，这时，也只有这时，商家之间才能产生竞争．进一步容易介定 Z 为拓扑空间，$Z^{\sim}$ 亦然．

当商家数有限时，设第 i 商家为 $S^i \in S$，并记 S^{i_0} 为 $S \setminus S^i$ 的“平均商家”，则关于 S^i 与市场上 $S \setminus S^i$ 之间的竞争可视为 S^i 与 S^{i_0} 之间的竞争，记为系统

$$<S^i, S^{i_0}>$$

竞争是个动态过程，记为映射 φ，φ 对于 X 一般是个自映射，

$$\varphi: X \to X$$

但对于 $X^{\sim}$ 一般为扩张映射，

$$\varphi: X^{\sim} \times T \to \Omega^{\sim}$$

讨论见后．鉴于我们的任务，这里只需表征市场竞争的主要特征，其模型只要能突出主要特征即可，应尽量简单一些．

据此，通过简单分析，该竞争动态系统可表为微分动力系统 (φ, X)，$\varphi: X \times T \to X$，其微分结构为

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{S}^i}{S^i} = A(\alpha - S^{i_0}) \\ \dfrac{\dot{S}^{i_0}}{S^{i_0}} = B(\beta - S^i) \end{cases} \tag{13.4}$$

其中参数 A, α, B, β 本质上是来自 S 空间之**对偶空间**的“参变量”．具体说还可简化地记 $\alpha = \alpha(B)$ 为 B 的减函数；$\beta = \beta(A)$ 为 A 的减函数．于是系统中只有两个独立的参变量 A, B，它分别表征竞争元 S^i 和 S^{i_0} 内在的竞争能力，是各自努力的效果体现（泛函值）．至于系统（13.4）中，元素 S^i 与 S^{i_0} 之间的竞争关系，已一目了然，不必细说，这里 φ 是系统（13.4）的“解”集，或说轨道族，抑或说“流”．

总之，我们得到**模型**：

当（1）Ω实行市场经济，市场人在法律意义下获得充分自由；

（2）X中满足$S>D$，$S=\{S^1,S^2,\cdots,S^\gamma\}=$(有限商家集)；

（3）$\forall S^i\in S$，$S^{i_0}\sim S\backslash S^i$，且$S^i=S^i(t)$，$S^{i_0}=S^{i_0}(t)$，则有$<S^i,S^{i_0}>$满足动力系统：

$$\begin{cases}\dot{S}^i=AS^i(\alpha-S^{i_0})\\ \dot{S}^{i_0}=BS^{i_0}(\beta-S^i)\end{cases}\quad\text{（连续型）}\tag{13.4$'$}$$

或

$$\begin{cases}S_{n+1}^i=AS_n^i(\alpha-S_n^{i_0})+S_n^i\\ S_{n+1}^{i_0}=BS_n^{i_0}(\beta-S_n^i)+S_n^{i_0}\end{cases}\quad\text{（离散型）}\tag{13.5}$$

注：（1）如果S中商家数很多，即可认为是完全竞争或叫“无原子市场”状态，这时单个商家对市场的作用甚小，这时的竞争也可取作如下形式：

$$S_{n+1}^i=\frac{A}{V}S_n^i\tag{13.6}$$

其中V表示市场形势泛函，可用统计或评价方式获得；A的含义同上. 特别地，也可简单地表示为$\frac{A}{V}=\alpha\frac{p^i}{p}$，其中$p$表示市场价格（统计均值），$p^i$表示$S^i$的成本价格.

（2）模型（13.4）、（13.5）、（13.6）只表出了市场的客观竞争形势，至于其主观竞争形势（诸如结构特征、努力效果等内在因素决定的形势）的描述皆含于系数中，待后面讨论.

三、系统(13.4)$'$的讨论

（1）由于式(13.4)$'$中参变量为常数（动力系统），所以可有

$$\frac{\mathrm{d}s^i}{\mathrm{d}s^{i_0}}=\frac{A}{B}\cdot\frac{S^i(\alpha-S^{i_0})}{S^{i_0}(\beta-S^i)}$$

或

$$\int\frac{\beta-S^i}{S^i}\mathrm{d}s^i=\frac{A}{B}\int\frac{\alpha-S^{i_0}}{S^{i_0}}\mathrm{d}s^{i_0}\tag{13.7}$$

抑或

$$\beta \ln S^{i}-S^{i}=\frac{A}{B}[\alpha \ln S^{i_0}-S^{i_0}]+c \tag{13.8}$$

由于取 $t=t_0$ 时，$\dfrac{\beta \ln S^{i}-S^{i}}{\alpha \ln S^{i_0}-S^{i_0}}=\dfrac{A}{B}$ 是合符实际的，所以可取 $c=0$.

由式（13.8）或（13.7）已能看出，$S^{i}(t)$ 的积分曲线是 $S^{i_0}(t)$ 积分曲线的常数倍，同时看到两者的**积分曲线皆非线性**.

（2）以 (13.4)′ 作定性分析（又叫几何分析）得知，它在相空间 (S^{i},S^{i_0}) 中正象限内有均衡点

$$(S_0^{i},S_0^{i_0})=(\beta,\alpha)\triangleq M$$

并确定其方向场后易知点 M 为鞍点，其轨道分布如图 13.4 所示.

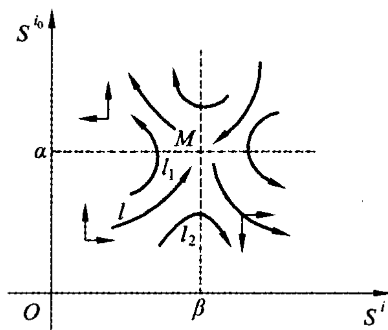


图 13.4

（3）结合式（13.8）或（13.7）可知，在竞争系统 $<S^{i},S^{i_0}>$ 中，胜败不仅取决于各自的努力效果 A 或 B，更取决于 A,B 之间的相对关系，即

当 $\dfrac{A}{B}<1$ 时，$S^{i}<S^{i_0}$，其轨道如图中 l_1，形势将对 S^{i_0} 有利；

当 $\dfrac{A}{B}>1$ 时，$S^{i}>S^{i_0}$，其轨道如图中 l_2，形势将对 S^{i} 有利；

当 $\dfrac{A}{B}=1$ 时，$S^{i}=S^{i_0}$，其轨道如图中 l，市场将趋向平衡点 M.

由此可见在系统（13.4）或 (13.4)′、（13.5）中，市场的均衡态存在，但不容易实现，且不稳定.

同时可以看到，图中轨道的宏观结构特征（定性走势）是由式（13.4）或 (13.4)′ 的结构式客观地决定的，至于系统中的具体参数则决定于竞争者主观的形势，它的取值仅能决定具体轨道及其精确位置. 这就是系统结构（框架）和系统参数在图形中分别的功能特征差异.

四、系统 (13.4)′ 或（13.5）的参数讨论

前面是就 A,B（从而 α,β）为常数时作出的讨论，实践中只有短期内才符合此条件. 实际上，随着时间的进程，有两点可表明 A,B 要变：一个是自然的改变

(随机因素)，因为原则上说天下没有绝对不变的事物，只有变化速度的大小差别；另一个是人为改变，诸如人为控制、管理、操纵所起的作用，换句话说是竞争对系统所起的作用.

回到我们的实际背景——市场，我们可认为S^{i_0}系统本身的“自然”改变是缓变的，可省略不计，但因为竞争的作用，人为对系统的改变是主要的、急速的，不可不计. 因此现在即从系统管理、经营、竞争出发对A, B的改变进行讨论.

特别地，对于管理、控制来讲，其作用是分步的而不是连续的，所以以下仅对（13.5）形式进行讨论，并且因为要考虑到A, B的改变，改记为

$$\begin{cases} S_{n+1}^{i} = A_n S_n^{i}(\alpha_n - S_n^{i_0}) + S_n^{i} \\ S_{n+1}^{i_0} = B_n S_n^{i_0}(\beta_n - S_n^{i}) + S_n^{i_0} \end{cases} \tag{13.9}$$

其中A_n, B_n分别表征S_n^i和$S_n^{i_0}$在竞争的第n步（第n阶段）中的自我（主观）反应效能. 因此它们分别是个泛函值，是综合、横断、升华S^i或S^{i_0}在第 n 步的一切措施和效能空间而成的量.

具体说，根据经济管理知识，可有

$$A_n = A_n(\text{开源、节流}) \triangleq A_n(G, J) \tag{13.10}$$

1. 关于开源映射 G

这是利用系统多层性结构和开放性结构向系统纵深乃至环境去索取“能量”的做法. 注意到比如系统S^i的“环境”有内、外两大领域，其内环境指系统每个成员的内部世界，那里有很大潜能. 总之，可把 G 归为对内的“挖潜”（ω）和对外的“开发”（I）两个方面的映射，即有

$$G: \omega \times I \to R$$

进一步，ω又是个多层映射，最终可达到系统内部各层组织直至对每个人的激励和重组（包括劳力重组、增减和人才的重组)，归根到底，激励和重组的实质是引入各层次直至每个人的竞争机制. 此外，重组也包括资产重组和设备更新等.

而对外的开发I，因为系统S^i是开放的，按本文限制也可以以整个Ω作为其扩张邻域. 再据实际观察，I的定义“空间”是高维的，比如有开创（技术创新、基础研究)、引进（资金、人才)、策划（包括多经、垄断、营销、广告等）乃至灰色和黑色手段. 其中灰色手段系指“走后门”、“拉关系”、“钻法律空子”等，黑色手段系指行贿、收买、偷税、“假冒伪劣”、违法等.

从而有:

命题 1　假设（1）: 记

$$(\omega;I)=(\text{激励}(\omega^1),\text{重组}(\omega^2);\text{引进}(I^1),\text{策划}(I^2);\text{灰色}(I^3),\text{黑色}(I^4))$$

且据观察知其各项的“开源”难度在对$(\omega,I)\triangleq\bar{r}\subset r$作权系数分布映射后，成为自左至右依秩下降的态势，如图 13.5 中实线 L.

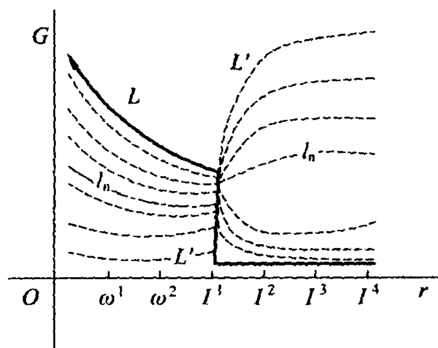


图 13.5

假设（2）：在 X 中 $\forall S^i\in S$ 具有不择手段的特性，其市场秩序靠法律和竞争本身的制约特性来维持．因此在法律不健全（包括法律条文不充实和执法不严等）条件下，S_n^i所实际执行的是l_n（虚）折线（其上难度与 L 上相反，但总效果与 L 上的等价，且来得容易，最容易的是 L' 折线）．其中虚线序列表示在法律逐步健全过程中，“虚”分布曲线逐步收敛至 L 的过程，则在上述假设下有

$$\lim_{n\to\infty} l_n(r)=L(r)$$

这是因为，如图 13.5 可见，在$[\omega^1,I^2]$正常范围内大致有关系

$$L(r)=\frac{a}{G(r)}$$

则进一步取 $a=G'(r)$ 是可以的，从而可有

$$L(r)\mathrm{d}r=\frac{G'(r)}{G(r)}\mathrm{d}r$$

又因区间$[\omega^1,I^4]=\bar{r}$，L,l 在 $\bar{r}$ 上皆分段函数，则可有

$$\int_{\bar{r}} L(r)\mathrm{d}r=\int_{\bar{r}}\frac{1}{G(r)}\mathrm{d}G(r)$$

或

$$\ln G=\int_{\bar{r}} L(r)\mathrm{d}r \quad 抑或 \quad G=c\mathrm{e}^{\int_{\bar{r}} L\mathrm{d}r}$$

同时据假设有

$$\int_{\bar{r}} L(r)\mathrm{d}r=\int_{\bar{r}} \ln(r)\mathrm{d}r$$

所以有

$$G=c\mathrm{e}^{\int_{\bar{r}} \ln(r)\mathrm{d}r} \quad （这里 c 为积分常数）$$

由于沿 $l_n(r)$ 比之沿 $L(r)$ 的难度小得多却效果一样，根据“竞争者具有不择手段的假设”，当其法律不健全时，自然 S_n^i 会就 l_n 而不就 L. 但毕竟因 $[I^3,I^4]$ 是歪门斜道，不利国家，因而处在法律逐步健全的过程中，l_n 取紧贴着法律严格化过程的前沿态势，而趋向于

$$L=\begin{cases}\dfrac{a}{G}, r\in[\omega^1,I^3]\\ 0,\ r\in[I^3,I^4]\end{cases}$$

由 l_n 随 n 的进程特征可见，S^i 对其系统内的管理、激发有个过程，且是逐步深入的，又因它是个多目标最优问题，且满足可解条件，所以存在最优性. 这一最优性表明，S^i 可能最终地充分发动起每个人，且渗透到每一角落使系统管理达到最优，即 L 是系统管理达到顶峰的标志.

2．关于节流映射 J

按系统论观点，开源是为系统增加有序能，节流则是减少系统有序能的无益流失，其表现效果是成本 C 的降低. 易知 J 主要表现为人（人才、劳力，记为 l）的合理安排（最优组合、最优设岗）、财（资金、设备，记为 k）的最佳利用和高速周转以及物（原材料、能源，记为 e）的低耗和节约（利用率高）.

特别地，出于人的“私性”特征，当纪律不严时，系统 S^i 中的“能量”流失还包括挥霍浪费、挪用贪污等额外损失，记为 ξ. 严格说，ξ 是属于 k 的利用效率问题，但据实际，不防单独列作一个因素.

总之有

$$J:\ l\times k\times e\times\xi\to R$$

且可表为

$$J(l,k,e,\xi)=b'C_n$$

其中 C_n 为第 n 期成本，b' 为调节系统，它也是一个函数，比如表现为 S^i 管理者能力等.

亦即 J 是对人财物利用效率的度量（一种评价泛函）.

3．小　结

根据 1、2 段的分析结合（4.8）式，可有

$$A_n = A_n(G,J) = \sigma(GJ) = b\mathrm{e}^{\int_{\bar{r}} \ln(r)\mathrm{d}r} C_n$$

其中 σ 是个系数，$b = \sigma c b'$ 为调节系数. 其实际意义是由诸如市场反应能力、信息收取能力等决定的.

进一步对单降函数 $\beta(A_n)$ 可取为

$$\beta(A_n) = h' A_n^{-1} = h'(b\mathrm{e}^{\int_{\bar{r}} \ln(r)\mathrm{d}r} C_n)^{-1} = h\mathrm{e}^{-\int_{\bar{r}} \ln(r)\mathrm{d}r} C_n^{-1}$$

其中 $h = \dfrac{h'}{b}$ 为调节系数，其实践意义类似于 b 的叙述.

此外，B_n 的含义同 A_n，不过因这时 B_n 代表市场上 $S \setminus S^i$ 的统计量. 可以认为 B_n 的变化是缓慢的、单调上升的，同时 $\alpha(B_n)$ 也是缓慢的减函数.

最后，将所获 A_n, B_n 及 $\alpha(B_n), \beta(A_n)$ 表达式代入（13.9）式即得到实证模型，再借助计算机即可获得所求的市场形势分析.

五、关于国企与非国企的竞争

设式（13.9）中 S_n^i 为竞争中（第 n 期）国营企业，$S_n^{i_0}$ 为相应时期的非国营企业，均以统计平均元作为代表，则易看出这是竞争的一种特殊情形，这时的 A_n 与 B_n 差异较大. 首先，这时 A_n 表现为自主性差，因而其 C, J 的自由度低. 比如人员进出受人事制度的制约、管理的自主权受限以及退休职工“包袱”重等. 但另一方面也有政府的“支撑”，诸如政策的优惠、财政的扶持等都是与 $S_n^{i_0}$ 不同的条件，致使它们的竞争条件不同（不在同一起跑线上）. 至于 S^i（国企）与 S^{i_0}（非国企）究竟谁的竞争条件最优，从竞争因素向量看，各有优劣，但从评价意义看尚待度量，当然这也是可以度量的.

不过从市场竞争的长远性讲，S^i 所受的“半计划经济”的包袱，产生的效果将是与市场经济的特征和优越性格格不入的. 比如有难以提高市场反应率、难以顺利进行内部管理等，更主要的是不能充分调动管理者的积极性，因为在它的体制下不能处理好“私”与公的矛盾.

总之，在通常市场经济下，式（13.9）中函数 A_n, B_n 应该具有相同的影响因素，具有同一竞争条件，但在本段意义下 A_n 与 B_n 却十分不同，而且这种不同条件不是通过竞争者主观努力可改变的，自然不管谁优，都是不正常的竞争模式，它将客观地一开始便能决定胜利者．因此根据“市场竞争必在同条件下才能持久”的原理，若要市场正常，只有随着 n 的增长 $\exists m > n \ni A_n$ 与 B_n 的因素变得相同，此即意味着竞争必将转为正常；否则不可能持久，要么 S^i 破产，要么 S^{i_0} 破产．

这就解释了，我们目前或说过去的市场竞争形式是不够正常的，必须逐步改为正常方可持续下去．否则不管怎样，胜负双方不是由竞争来决定，而是早已由前提条件客观地决定了的．

六、重组论

为何我国（20 世纪末）会出现下岗热，这种现象正常吗？是短暂现象吗？今后将怎样发展变化？根据“四”中对 A_n (从而 B_n）的讨论，这些问题都是可以解释的，这是因为：

（1）从“四”中分析，比如 $A_n(G,J)$ 中正常的（非灰色、非黑色）管理行为下，（竞争的结果）都将涉及到对系统的重组．首先是资产重组，包括技术改造、扩大规模、多种经营乃至兼并联合等；此外是人员重组，包括人才的引进、合理安排，员工的最优设岗、最优组合、削减冗员等．

（2）从系统论角度说，随着竞争过程的进展，系统引入越来越多的正熵 (S_+)，为消化掉这些 S_+，自然表现是，系统将通过涨落产生自组织，从而在新的水平上形成新的均衡状态．这里“新水平”意味着系统有了新的自组织结构，而这种自组织过程就是重组过程，包括人员（劳力、人才）、资金、设备等的重组．自然，重组的目标是为了提高系统功能以达到高效益的优化结构，因而必以系统的优化目标为准绳，来决定人财物的取舍和引进．特别对于我国国企这样长期实行广泛就业（隐性失业）的企业，冗余人员必然很多，所以大量下岗是势在必行，且越早越好．

（3）从竞争的持续性来看，重组现象必将持续发生，那么重组中必涉及人员的引进和辞退，特别涉及破产现象时有发生，所以失业（下岗）现象将是长期的、持续发生的，只是一般说来没有目前这么突出罢了．

再从世界经济发展的历史来看，失业现象是从无到有、从弱到强日益发展的．这是因为生产力的上升，生产效率提高的速度将高于人类享用的需求量上升速度的自然结果，是正常的，因此尽管可以说今后的下岗现象不一定有目前这么高涨，但可信它不会消失，而是要在正常基础上逐步上升．

七、竞争势及其传递效应

事实上，对于系统 13.5，说它的轨道族为 $\varphi_n: S \to S$，仅仅是在相空间，从动力系统角度来说的．当从泛函分析角度看时，它是赋范空间 $\Omega^{\sim}$ 上的算子序列 $\{\varphi_n\}$，而且这一观点更高，这时轨道映射只是一种空间投影下的结论，从而当从 $\Omega^{\sim}$ 上来看时，每步轨道映射在这里就不那么简单了．事实上，“四”中对 $A_n(B_n)$ 的研究即属第 n 步算子 φ_n 的映射内容（实际背景）分析，那么这里即在此基础上对 φ_n 序列 $\{\varphi_n\}$ 进行研究，我们将始终紧密结合实际背景来叙述．从另一角度说，由于在低维的相空间 Ω 来看，竞争过程只是个（离散）动力系统（φ_n）过程，但进一步从 $\Omega^{\sim}$ 来看，易知这时的“动力”来自竞争这一“激励机制”，由此将激起每个系统的内能释放，从而形成一种社会的“竞争势能”．它就是动力系统意义下的轨道映射“φ_n”，也是泛函意义下的算子作用 φ_n，因此也叫 φ_n 做竞争势或叫“竞争算子”．现在分别讨论于下：

1．在相空间上的 $\{\varphi_n\}$

在相空间上，$\{\varphi_n\}$ 叫做轨道映射，记为

$$\varphi_n: \Omega \to \Omega$$

这时对 $\forall S^i \in S \subset X \subset \Omega$，$\varphi_n(S^i) = S_n^i$，那么映射序列为 $\{\varphi_n(S^i)\} = \{S_n^i\}$．我们把实践中对 $\{\varphi_n\}$ 在任一有限时期内的考察叫做**广义极限过程**，记为

$$\lim_{n\to} S_n^i \tag{13.11}$$

这时容易据实得知，式（13.11）可能有如下几种结果：

（1）当 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{A_n^i}{B_n^i} < 1$（意即 $\exists m>0 \ni n>m$ 时保持为<1 的情形时）时 $\lim\limits_{n\to} S_n^i = 0$．意味着 S^i 破产或被吞并（社会重组），总之意味着 S^i 的名称品牌不存在了．但商家 S^i 的人还在，只是他们不以 S^i 商家名义而存在罢了，所以也说这时 $\lim\limits_{n\to}\varphi_n(S^i) \in \Omega$．

（2）当 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{A_n^i}{B_n^i} = 1$（或不确定、>1 时、<1 时）时，$\lim\limits_{n\to} S_n^i = S^i \in S$，意味着 S^i 能正常生存下去，这时 S^i 仍属于 S 集合．

（3）当 $\lim\limits_{n\to}\dfrac{A_n^i}{B_n^i} > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to} S_n^i = hS^i \in S$ $(h>1)$．意味着这时 S^i 能发展扩张，但 S^i 的品牌未变，所以仍属 S．

2．在完全空间 $\Omega^{\sim}$ 上的 $\{\varphi_n\}$

在 $\Omega^{\sim}$ 上情况就复杂了，这时能显示出“四”中讨论到的一切情形．首先容易界定，在 $\Omega^{\sim}$ 上看，φ_n 是有界线性算子，或说是 $\Omega^{\sim}$ 上能量有限的竞争势，因此这时 $\varphi_n:\Omega^{\sim}\to\Omega^{\sim}$．

其次，对 $\forall\varphi_n\in\{\varphi_n\}$，在算子意义下是扩张映射（当视 S^i 为一点时，也可叫集值映射）：$\varphi_n(S^i)=\varphi(S_{n-1}^i)\triangleq V_n(S^i)\triangleq V_n$，是包含 S^i 的一个完全子空间．它包括 S^i 根据 φ_{n-1} 步的信息作出对策和由此产生的活动（空间）等两个过程．这时有 $V_n\cap E\neq\varnothing$，从而也有 $V_n\cap E^{\sim}\neq\varnothing$；同时在一定条件下（如法律不严）有 $V_n\cap Z\neq\varnothing$，从而也有 $V_n\cap Z^{\sim}\neq\varnothing$．显然，在同样条件下有 $\varphi_n(s)\supset\Omega^{\sim}$，当然，由于 $\Omega^{\sim}$ 是完全空间，所以这时“$\supset$”是假包含．

再则，在竞争势的意义下也表为 $\varphi_n(E)\subset E^{\sim},\varphi_n(Z)\subset Z^{\sim}$．容易证明，上述算子观点和竞争势观点是等价的．

那么从后一观点出发可看出，$\{\varphi_n\}$ 对于 $\Omega^{\sim}$ 的作用有两种情形：

（1）记 $\varphi_n(E)=E_n=\varphi(E_{n-1})$，表示由 S 中的竞争所产生的第 n 次竞争势 φ_n 对 E 产生的作用，于是这一作用的序列等于序列的复合作用，即

$$\lim_{n\to}\varphi_n(E)=\lim_{n\to}\varphi_n\cdots\varphi_2\circ\varphi_1(E)\triangleq\lim_{n\to}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(E) \tag{13.12}$$

根据有势差就有作用、能量渗透这一原理、哈密顿最小作用原理以及“量变-质量”原理，再结合现象观察，的确在市场经济过程中，X 的外围市场 E 也在逐步改变，亦即在式（13.12）中总 $\exists m>0\ni n>m$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(E)\subset\widetilde{X}$．$\widetilde{X}$ 表示市场的扩张，即外围市场可能逐步被市场化．当 $\widetilde{X}=(X;E)$，即外围市场完全被市场化．

事实上，比如这时教育系统所设专业不得不面向市场、教师人才向 X 的流失等，都是直接受到市场影响的结果．另一方面，现在私立学校日增，各校内部逐步实施起鼓励竞争的激励机制也都说明教育正在走向市场化．又如，交通、新闻、电视、电台等的走向市场化步伐更快．可以看到，邮电事业最终也将被市场化．实际上，再据“市场经济下人人皆可自由选择经营行业”的原理，即使有某行业“效益高”而在 $\varphi_n(E)$ 中稳定不变，也会有人投入其中分享其效益的，从而会产生竞争，也会市场化．

（2）记 $\varphi_n(Z)=\varphi(Z_{n-1})=Z_n$，表示 S 上的竞争势直接作用到了 Z 上．Z 表示初始状态，Z_n 表示经 n 次 φ 作用后的效果 $\varphi_n(Z)$，它等价于视 Z_{n-1} 为初始状态时，对其再作一次 φ 作用的效果 $\varphi(Z_{n-1})$，这时有两种可能．

命题 2 若法律不够健全，则 $\lim_{n\to}\varphi_n(Z)=Z^*\subset E$.

这就是说，当法律（记为 F ）作用弱时，即有 $F(\varphi_n(z))\approx\varphi_n(z)$ ，这时作为管理 (X,E) 的 Z 将被 $\{\varphi_n\}$ 腐蚀，而实质上也是被市场化了．这是坏事．因若这样，社会 Ω 的虚实结构被瓦解了，即其“完全性”没有了，于是成为不稳定系统，所以是坏事．

为何 F 弱，$\{\varphi_n\}$ 即能腐蚀 Z? 这是因为 Z 也是人组成的．从社会职能讲，他的职位要求他超脱于市场（为其共轭空间），这需要高尚品德，所以 Z 的人一般是高素质的，但毕竟是人人皆有私欲，因而容易受利益的引诱，加上 $\{\varphi_n\}$ 的长期作用，尽管可说它是有界线性算子序列（或说能量有限），但累积意义下的有界能量也容易攻破 Z，从而损害 Z 的社会功能．

显然，为保护社会 Ω 的完全性，有效的办法是加强法制 F 作用，因 $F:\Omega^{\sim}\to\Omega^{\sim}$ ，即 F 是维护社会正常活动的．所谓“正常”，即保证平等竞争，保证 Ω 的完全性，因而将完全厄制住 $\Omega^{\sim}$ 中产生于“私欲”澎涨的有损 Ω 完全性的坏行为．

当然，F 也是人来制订的，是由人来制订的扼制人自己的条例，这里含有（一切集合的集合式）**集合悖论**，所以不是容易的．实践表明，还需要有别的人对制订和执行 F 的人实行**有效监督**、约束才行．

命题 3 当 F 的作用适当强，且能稳定有效时，必

$$\lim_{n\to}\varphi_n(Z)\equiv Z \quad \text{或} \quad F(\varphi_n(Z))\equiv Z,\ \forall n\in\mathbf{N}$$

这里所谓“F 的稳定有效”，在实践中即“有效监督”问题．正如所说，出自“集合悖论”原理，这是很难实现的一个实际问题．

命题 4 设 $\Phi=\left\{\varphi^i=\varphi(S^i)\middle|S^i\in S\right\}$ ，则当下列条件满足时，市场经济社会 Ω 成为稳定系统，即 $\Phi:\Omega\to\Omega$ 结构稳定．

（1）F 完全有效：即 $F(\Phi(Z))=Z$ ；

（2）$\widetilde{X}=(X;E)$ ，这时 $\Omega=\widetilde{X}\times Z$ （所谓 Ω 结构稳定是 $\widetilde{X},Z$ 的规模、机能和职能等皆其不变性）．

为着该命题的严格证明，尚需更多数学准备，兹免．事实上，结合到我们的实际对象来考虑，这一结论是直观的，且能看到，当满足条件（1）、（2）时，Φ 由定义中的 S 也成为大市场 $\widetilde{X}$ 的“商家集”了．

推论 1 在命题 4 条件下，$\forall S^i\in\widetilde{X}$ 的内部管理将达到成熟阶段，即其内部各层次直到每个成员都被激励，成本基本上达最低，效率基本上达最高．所谓“基

本上”是因为$\widetilde{X}$中竞争系统属巨复杂系统，其均衡状态不可能绝对静止在一个数学点上．换句话说，基本上最优就是实践上的最优（Pareto 最优）．

推论 2　在命题 4 条件下，整个社会Ω将成为典型的市场经济，亦即这时的竞争是基本上公平的，这时的政府干预（或叫管理）职能也是正常的．

也就是说，在典型的市场经济中，所有竞争者内部的挖潜、节流皆达成熟地步，唯一的只有向外了．这时一方面得靠竞争策略，另一方面得靠扩展市场．亦即这时一切S^i内部发挥出的潜能汇集成的能量，除Ω的自组织消耗（吸收）以外，还有剩余，表现为生产能力过剩、产品过剩等，且急需释放这些多余能量，或说需要在更高层次、更大规模（超出Ω）上去产生新的经济组织．这就是发达国家急需扩大市场，发达企业急需国际化的系统学实质．

命题 5　在Ω达结构稳定态时，Ω迫切需要向外扩张市场．

当然出于社会、社会组织、社会生活的巨复杂性以及高维甚至无穷维（函数空间）性，一个社会Ω并非只在达到了结构稳定的时刻，才产生扩大市场的需求，而是在Ω向着结构稳定的发展过程中，扩张市场的要求即从无到有，从小到大增长着，当Ω达结构稳定时，其扩张要求最盛，扩张的能力也最强．

还须看到，这种扩大市场的要求在半个世纪前被看成仅是帝国主义的野心，这是合符当时史事的．但在今天大家都有一定发展，互相开放已具有一定的互惠互利性了．这也是第二次世界大战以来有关国际交流合作的组织、协议日增的实际背景．

由此看来，我们今天既要积极支持参与国际合作，也要看到这时更多的是发达国家得利，因而我们还要积极开发内部潜能，以早日实现典型的市场经济，以便有更强的能量去参与国际市场竞争．

第五节　应用例Ⅱ：人类社会演化规律探索

不可讳言，任一局部社会都是个巨复杂系统，对其运行规律的探索必然复杂，但是对于“人类社会”这一种群整体的演化规律却是相对简单的．因为这里针对的对象和任务是“人类”和“演化”．前者系指（在种群意义下的）整体考察，属于其“空间”的宏观考察，比如，这时已用不着考虑诸如国与国之间具体的博弈之类细腻因素了；后者系指时间维的宏观考察，这时只需在“达尔文尺度”下来考察即可．

亦即这时从空间和时间上看都是“宏观”的，而对事物的宏观考察，实则“必

然规律”的考察，其本质是只看“统计”规律，不计各种随机因素（实则随机作用已在“统计”思考中被“抵消”了）.

因此在此意义下即可说，影响人类社会系统演化的因素比较单纯，只需在宏观层次上来考察“人类及其资源环境”这一大系统的内在因素即可.

换句话说,本节将说明从系统学角度对人类社会演化规律的探索是容易的.不过限于本著的宗旨，这里只准备提纲式、问题式、数理思维式地提出即止. 其实这是一大研究领域，完全值得数学的介入，望能引起年轻学者们的兴趣.

一、基础理论：系统演化的动力与能量

1. 系统的能量来源：广义自组织

在广义意义下，整个客观世界（包括虚的和实的）都是由能量构成的，且总在进行着能量的转换，叫做“**自组织**”. 特别是一个复杂系统更需要所谓“广义自组织”来实现其能量的完全转换. 比如一个社会，从其个体“人”到社会的各个层级“组织”，都是（广义）由能量构成的，且需要不断补充能量（实则能量交换）. 这里即存在一个以经典自组织理论为基础的“广义自组织”过程.

2. 系统发展的动力：系统“目标”下的竞争

系统从元素到整体（完全系统）皆由多种多层能量构成，且也因能量而处于“**动态**”. 那么系统的发展，其实质是什么？其动力从哪里来？可有：

定理 13.1　系统元素（总处于动态）在共同目标下，产生的“合力”促成**系统的发展**.

这里“合力”的产生既可以来自元素间（在共同目标下的有序）的竞争，也可以来自元素间（为着共同目标的）的合作. 前者叫做竞争系统，后者叫做合作系统.

显然，**竞争系统**适用于其元素的“私性”较难遏制的条件，由此可解释当前世界的“多元化”（多元竞争）和市场经济原理. 与之对偶的，**合作系统**则适用于元素的“公性”较强的环境和条件下.

进一步，在上述两个基本前提下，可把社会的“演化”分为**社会存续、社会进步、社会演进**等三个方面（也是三个层级）来考察.

二、社会的存续：广义周期性

社会系统在具备“能量”和“动力”之下若能长期生存（简称存续），其基本表现形式就是要具备“周期性”. 特别地，对于复杂的社会系统更需要有（第八章

第四节的）广义周期性与复合周期性．

换句话说，一个复杂系统只要能在广义、复合意义下实现其“周期性”即具备了可持续性．这是因为“周期函数的定义域（时间）无穷”．

进一步指出，在“统计周期”（第八章第四节、二的）概念下，一个可持续社会的每次周期性“迭代”中可能产生“利、弊”两种剩余量．对于“利”归下面讨论．对于“弊”则需要及时（用复合周期去）消除以实现“广义周期性”，否则系统难于持续，如图 13.6 所示．

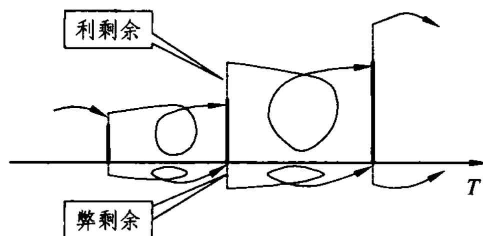


图 13.6

图 13.6 中仅示意性给出过程中的连续两个“复合周期”，每一“复合”的周期迭代后，原来的“利”剩余被保持并参与系统循环，但“弊”剩余被消除了，同时又产生了新的“利、弊”二虚段，如此循环下去．

三、社会的进步：生产力的提高

首先说，人类生产力的提高应取决于人类科学技术的发展，而人类科学技术的发展则取决于人类的人才、智力水平，那么在教育因素充分发挥（智力挖掘）的假设下更要说人类生产力水平根本地取决于人类智力或说“智能”的进化水平（统计量）．

进一步说，生产力的提高是怎样表现在社会进步上的呢？那就是示意于图 13.6 中的每次周期性“迭代”中所产生的“利”剩余．

反之则说，这种“利”剩余的持续产生，即会有社会生产力（统计意义下）的不断进步．

定理 13.2 假设智能进化有界（Z），人的消费需求总量（X）有限，则若能证明：$Z > X$，则全人类生活将存在且能达到最富裕水平．

四、社会的演进：人性的进化

在考察人类社会的宏观规律时，不能不考虑到“人性”这一“关键”的“可

变”因素.

首先证明，这时人性是“可变”的，实则进化着的，只是进化速度相对很慢罢了，其影响因素是社会环境和生产力的发展水平.

其次证明，社会的演进（其速度与最终水平）根本地取决于其人性的进化.

若记人性为 L，则有

$$L=(\text{私本性，公本性})=(s,g)$$

观察表明私本性的进化已过顶峰期，公本性的进化已逐步进入快速期.

进一步，在上述定性分析基础上作出建模（Logistic 动力系统)，经较长分析（这里只给出结论）得出私性进化曲线：

$$S(t)=\mathrm{e}^{-\gamma(t)}[\mathrm{e}^{x(t)}\frac{\sigma}{1+\mathrm{e}^{-\gamma(t)}}]=\sigma\frac{\mathrm{e}^{(x-r)(t)}}{1+\mathrm{e}^{-\gamma(t)}}$$

其中 σ 为调节系数，$\gamma(t)(\geqslant 0)$为增函数，$(x-r)\begin{cases}>0, \text{早期（公性产生之前）}\\<0, \text{晚期（公性产生之后）}\end{cases}$；公性的进化曲线为 $G(t)=\dfrac{2\sigma}{1+a}\cdot\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\gamma(t)}}$，示意如图 13.7 所示，公私二曲线的渐近线为 $\dfrac{\sigma}{1+a}$，其中 $a=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\gamma(t)}}{\mathrm{e}^{(x-r)t}}$.

猜测：在定性分析基础上可作出私性、公性的进化曲线，如图 13.7 所示.

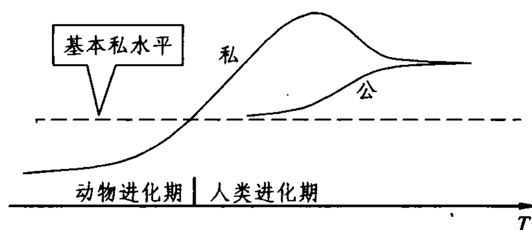


图 13.7

图 13.7 中认为，公性与私性的二象论考察应建立在人的“基本私水平”之上，甚至还可分的更细一点. 进化的最终应是公私相当，或说公性足以与私性抗衡的水平，当然系指统计平均（期望）水平. 显然，在上述讨论基础上，可对人类社会未来作预测性研究（笔者的研究属系统学的“数理思维”型，也是本书知识基础上的“合情推理”，尚待数学上的深入，这里仅点到为止，谢谢）.

[General Information]
书名=数学及其认识 第2版
作者=高隆昌，李伟著
页数=386
SS号=13013539
DX号=
出版日期=2011.09
出版社=西南交通大学出版社

第三节　公理化一瞥

一、古典公理化思想的产生

1．从一个故事谈起

2．第一次数学危机的教训

3．数学需要公理化

4．公理化几何的诞生

二、现代公理系统思想的产生

三、公理化、公理系统与形式化、形式系统的关系

四、公理化思想（广义公理化）

1．“定义”中的公理化方法

2．数学理论中的定理、命题叙述都具有公理化形式

3．一般的数学模型叙述都是公理化形式（例）

4．一切数学学科都是公理化的

五、公理化赞（代小结）

第三章　数学中的几个基本特征

第一节　数学的基本对象：集合

一、集合认识简顾

二、集合概念及其引申

三、集合与空间

四、集合元素与数学的抽象性

1．经典数学的抽象性

2．现代数学中元素的抽象性

3．集合概念的运用正好符合现代数学的抽象特征

第二节　数学的基本关系

一、序关系

二、运算关系

1．数学的基本运算方法

2．数学的基本运算形式

3．运算方法的推广

4．数理逻辑运算

三、映射关系

1．概念认识

2．映射与函数

第三节　数学的基本任务

一、“解”

2．系统发展的动力：系统“目标”下的竞争

二、社会的存续：广义周期性

三、社会的进步：生产力的提高

四、社会的演进：人性的进化